Diferansiyel Denklemler

ÜNİTE 14

Yazar
Prof.Dr. Vakıf CAFEROV

Amaçlar

Bu üniteyi çalıştıktan sonra;

- diferansiyel denklem kavramı ile tanışacak,
- diferansiyel denklemler ile pratik problemler arasındaki bağlantıyı görecek,
- basit diferansiyel denklemleri çözebileceksiniz.

İçindekiler

Çalışma Önerileri

- Üniteyi baştan sona kadar bir kaç defa dikkatlice okuyunuz

- Çözülmüş örnekleri iyice inceleyiniz
- Basit denklemler yazıp tipini belirleyerek çözmeye çalışınız
- Özel çözümün genel çözümden nasıl elde edildiğine dikkat ediniz.

1. Giriş

Diferansiyel denklemler, uygulamalı matematiğin çok önemli kollarından biri olup, bir çok pratik problemin çözümünde önemli bir araçtır. Bu problemlere örnek olarak salınım problemleri, roket, uydu ve gezegenlerin hareketleri, kimyasal reaksiyonlar, radioaktif maddelerin parçalanması problemleri vb. gösterilebilir. Bu ünitenin amacı diferansiyel denklemlerle tanışmak ve basit denklemlerin çözümünü vermektir.

2. Diferansiyel Denklem Kavramı

Diferansiyel denklemler, bilinmeyen $y = y(x)$ fonksiyonunun türevlerini içeren bir eşitliktir. Bu eşitlikte türevlerle beraber $y = y(x)$ fonksiyonunun kendisi x in bilinen fonksiyonları ve sabitler de bulunabilir. Türevler denildiğinde I. mertebeden, II. mertebeden, . . . türevler kastediliyorlar.

Denklemdeki en yüksek mertebeden türevin mertebesine **diferansiyel denklemin mertebesi** denir. Örneğin,

$$y' = \sin x, \quad y' - y = 0, \quad xy' + x^2 y = 3$$

denklemleri I. mertebeden,

$$y'' + 4y = 0, \quad y'' + 3y' + 5y = 0, \quad y^3\, y'' + e^x\, y^4 = 8$$

denklemleri ise II. mertebeden denklemlerdir.

Not: Yukarıdaki denklemlerde y, y', y'' fonksiyonları x değişkeninin fonksiyonlarıdır. Genellikle, denklem yazılımında y, y', y'', . . . altındaki x değişkeni yazılmıyor. Örneğin, $y'(x) - y(x) = 0$ yerine kısaca $y' - y = 0$ yazılır.

Şimdi matematik modeli diferansiyel denklemlerle verilebilen bir kaç örneği ele alalım.

Örnek:

1) Düzlemde bir $y = y(x)$ fonksiyonunun grafiği üzerindeki her $(x, y(x))$ noktasında teğetin eğiminin $x \cdot y(x)$ olduğunu varsayalım. Türev konusundan bildiğimiz gibi, $(x, y(x))$ noktasındaki teğetin eğimi $y'(x)$ olduğundan

$$y'(x) = x\, y(x)$$

yazılabilir. Buna göre, bu eğrinin diferansiyel denklemi

$$y' = xy$$

olur.

2) Deneyler sonucunda herhangi bir radyoaktif maddenin, herhangi bir andaki kütlesinin değişim hızının (başka deyişle cismin parçalanma hızının) o andaki kütlesi ile orantılı olduğu görülmüştür. Eğer x anındaki kütle $y(x)$ ise, kütlenin değişim hızı $y'(x)$ türevidir. Deneyler sonucuna göre,

$$y'(x) = k \cdot y(x)$$

yazılabilir. Burada k verilmiş cisme bağlı bilinen sabit negatif bir sayıdır. Bu sayının negatif olmasının sebebi, $y(x)$ kütlesinin zaman geçtikçe azalmasının sonucu olarak $y'(x)$ türevinin negatif olmasıdır. Dolayısıyla radyoaktif kütlenin diferansiyel denklemi

$$y' - ky = 0$$

dır.

3) Yeterli derecede ısınmış bir metal cisim 30° lik bir ortamda (örneğin, havada veya suda) soğutulmaktadır. Deneyler gösteriyor ki bu durumda cismin soğuma hızı, cismin o andaki sıcaklığı ile ortamın sıcaklığı farkı ile orantılıdır. Eğer x anındaki sıcaklık y(x) ise

$$y'(x) = k\,(y(x) - 30)$$

yazılabilir. Burada k cisme bağlı negatif bir sabittir. Böylece soğumanın diferansiyel denklemi

$$y' = k(y - 30)$$

olur.

4) Esnek bir yaya asılmış m kütleli ağır bir cismin serbest salınımını ele alalım. Eğer x anında denge durumundan olan uzaklık $y(x)$ ise o zaman Newton'un II. kanununa göre (bazı varsayımlar koşuluyla)

$$my''(x) + k\,y(x) = 0$$

eşitliği yazılabilir. Burada k sabiti yayın esneklik sabitidir. Buna göre serbest salınımın diferansiyel denklemi

$$my'' + ky = 0$$

olur.

$y = f(x)$ fonksiyonu verilsin. Eğer bu fonksiyon ve onun $y' = f'(x)$, $y'' = f''(x)$, ... türevlerini denklemde yazdığımızda denklem x e göre bir özdeşliğe dönüşüyorsa, o zaman $y = f(x)$ fonksiyonuna **denklemin çözümü** denir. Örneğin, $y = e^x$ fonksiyonu $y' - y = 0$ denkleminin çözümüdür. Çünkü $y' = (e^x)' = e^x$ olduğundan denklemde y yerine e^x ve y' yerine de e^x yazarsak $e^x - e^x = 0$ gibi bir özdeşlik elde ederiz. Aynı zamanda C keyfi sabit olmak üzere $y = C\,e^x$ fonksiyonunun da çözüm olduğunu görmek zor değildir. Keyfi sabit (veya sabitler) içeren çözümlere **genel çözümler** denir. $y' - y = 0$ denkleminin genel çözümü

$$y = C\,e^x \quad \text{dir.}$$

I. mertebeden diferansiyel denklemlerin genel çözümleri bir keyfi sabit, II. mertebeden denklemlerin genel çözümleri ise iki keyfi sabit içerir.

Örnek:

$xy' + y = e^{-x}$ denklemi verilmiştir. Bu denklemin genel çözümünün $y = \dfrac{C - e^{-x}}{x}$ olduğunu gösterelim.

Çözüm:

$y = \dfrac{C - e^{-x}}{x}$ fonksiyonunun türevini kesrin türevi gibi alalım:

$$y' = \left(\frac{C - e^{-x}}{x}\right)' = \frac{\left(C - e^{-x}\right)' \cdot x - x' \cdot \left(C - e^{-x}\right)}{x^2} = \frac{\left(0 + e^{-x}\right) \cdot x - 1 \cdot \left(C - e^{-x}\right)}{x^2} = \frac{x \cdot e^{-x} - C + e^{-x}}{x^2} .$$

y ve y' ifadelerini denklemde yazarsak

$$x \cdot \frac{x \cdot e^{-x} - C + e^{-x}}{x^2} + \frac{C - e^{-x}}{x} = e^{-x} ; \quad e^{-x} = e^{-x}$$

özdeşliği elde ediliyor. Buna göre C keyfi sabitine bağlı

$$y = \frac{C - e^{-x}}{x}$$

fonksiyonlar ailesi genel çözümdür.

Örnek:

$y'' + 4y = 0$ denkleminin genel çözümünün $y = C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x$ olduğunu gösterelim. Burada C_1 ve C_2 keyfi sabitlerdir.

Çözüm:

$y = C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x$ fonksiyonunun türevlerini alıp denklemde yazalım.

$$y' = 2\,C_1 \cos 2x - 2C_2 \sin 2x, \quad y'' = -4C_1 \sin 2x - 4C_2 \cos 2x \; ;$$

y ve y'' değerlerini denklemde yerlerine yazarsak,

$$-4C_1 \sin 2x - 4C_2 \cos 2x + 4(C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x) = 0 \ ;$$

$$0 = 0$$

özdeşliği elde edilir. Böylece iki keyfi C_1 ve C_2 sabitlerine bağlı $y = C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x$ fonksiyonu C_1 ve C_2 sabitlerinin her bir değerinde deklemi sağlamış olur ve dolayısıyla genel çözümdür.

Genel çözümden, keyfi sabite (veya sabitlere) değerler verilmesiyle elde edilen çözümlere denklemin **özel çözümleri** denir. Örneğin, $y = e^x$, $y = -\sqrt{2}\, e^x$, $y = \frac{1}{2} e^x$, ... fonksiyonları $y' - y = 0$ denkleminin özel çözümleridir.

$y = \sin 2x + 2\cos 2x$ fonksiyonu da $y'' + 4y = 0$ denkleminin bir özel çözümüdür. Bu çözüm genel çözümden keyfi sabitlerin $C_1 = 1$, $C_2 = 2$ değerleri için elde edilmiştir.

Bunlarla beraber, diferansiyel denklemlerin tekil (singüler) çözümü de mevcut olabilir. Eğer denklemin bir çözümü genel çözümde sabite (veya sabitlere) değerler verilerek elde edilemiyorsa bu çözüme **tekil çözüm** denir. Örneğin, $y'(y - x) + xy - x^2 = 0$ denkleminin genel çözümü $y = -\frac{x^2}{2} + C$ dir. Aynı zamanda bu denklemin, genel çözümünde sabite değer verilerek elde edilemeyen $y = x$ çözümü de bulunmaktadır. Buna göre $y = x$ tekil çözümdür.

x ile y arasındaki bir $G(x,y) = 0$ bağıntısı diferansiyel denklemi sağlıyorsa o zaman bu bağıntıya denklemin **kapalı çözümü** denir. Örneğin, $x^2 + y^2 = 3$ bağıntısı $yy' + x = 0$ denkleminin kapalı çözümüdür.

I. mertebe diferansiyel denklem ve a, b sabit sayıları verilsin. Bu denklemin çözümleri içerisinde $y(a) = b$ koşulunu sağlayan $y(x)$ çözümünün bulunması problemine **başlangıç değer problemi (b.d.p)** denir. B.d.p. çözümü için önce denklemin genel çözümü bulunur. Sonra x yerine a, y yerine b yazılarak C keyfi sabiti için bir değer bulunur. Bu değer genel çözümde C yerine yazılarak istenen özel çözüm elde edilmiş olur.

Örnek:

$y' - y = 0$ denklemi ve $y(1) = e^2$ koşulundan oluşan b.d.p. çözelim.

Çözüm:

$y' - y = 0$ denkleminin genel çözümünün $y = C e^x$ olduğunu yukarıda ifade etmiştik. Bu çözümde x yerine 1, y yerine e^2 yazarsak

$$e^2 = Ce^1 \Rightarrow C = \frac{e^2}{e^1} = e^{2-1} = e$$

bulunur. C = e değerini genel çözümde yazarsak

$$y = e \, . \, e^x = e^{x+1}$$

fonksiyonu b.d.p. nin çözümü olarak bulunur.

Örnek:

$xy' + y = e^{-x}$ denklemi ve $y(-1) = 0$ dan oluşan b.d.p. ni çözelim.

Çözüm:

Denklemin genel çözümünün $y = \dfrac{C - e^{-x}}{x}$ olduğunu yukarıda göstermiştik. Burada x yerine -1, y yerine 0 yazarsak

$$0 = \frac{C - e^{-(-1)}}{-1} \Rightarrow C - e = 0 \Rightarrow C = e$$

bulunur. C = e değerini genel çözümde yazarsak

$$y = \frac{e - e^{-x}}{x}$$

çözümü bulunmuş olur.

1) $\mathbf{y = \dfrac{C - x^2}{2x}}$ **in** $\mathbf{(x + y) + xy' = 0}$ **denkleminin genel çözümü olduğunu gösteriniz.**

2) $\mathbf{y = C_1 \sqrt{x} + C_2}$ **nin** $\mathbf{2x\, y'' + y' = 0}$ **denkleminin genel çözümü olduğunu gösteriniz.**

Yukarıda ele aldığımız örnek diferansiyel denklemlerin çözümlerini gerekli amaçlar için kullandık. Ancak, bu çözümlerin nasıl bulunduğundan söz etmedik. Aslında diferansiyel denklemler teorisinin esas problemi, denklemlerin çözümlerinin bulunması ve çözümlerin özelliklerinin araştırılmasıdır. Fakat, tüm denklemler için yararlı olan genel çözüm yöntemi yoktur. Ancak bazı özel tip denklemlerin çözüm yöntemleri bilinmektedir. Şimdi bu tip denklemlerden, değişkenlerine ayrılabilir denklemleri ele alacağız.

3. Değişkenlerine Ayrılabilir Denklemler

f(x) ve g(y) fonksiyonları x ve y nin birer fonksiyonları olmak üzere,

$$\mathbf{y' = f(x) \, . \, g(y)}$$

biçiminde yazılabilen denklemlere **değişkenlerine ayrılabilir** diferansiyel denklemler denir. Örneğin

$$y' = x \, . \, y \, , \quad y' = y \, . \cos x \, , \quad y' = e^x \, . \, y^2 \, , \quad y' = (x^2 + 1) \, . \, e^y \, , \; ...$$

gibi denklemler değişkenlere ayrılabilir denklemlerdir.

Değişkenlerine ayrılabilir denklemi çözmek için y' yerine $\frac{dy}{dx}$ yazılarak

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \,.\, g(y)$$

veya

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)\, dx$$

elde edilir. Her iki tarafın integralini alırsak,

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\, dx + C$$

yazılabilir. İntegraller hesaplandıktan sonra genel çözüm bulunur.

Not: Yukarıda iki tane integralleme sonucunda iki C_1 ve C_2 keyfi sabitleri yazılmalıdır. Ancak iki keyfi sabitin farkı yine bir keyfi sabit olduğundan sonuçta tek bir C sabiti yazılır.

Örnek:

$y' - y = 0$ dekleminin genel çözümünü bulalım.

Çözüm:

$$\frac{dy}{dx} = y \;; \quad \frac{dy}{y} = dx$$

yazıp her iki tarafın integralini alırsak

$$\int \frac{dy}{y} = \int dx + C$$

yazılır.

$$\int \frac{dy}{y} = \ln|y| \,, \qquad \int dx = x$$

olduğundan

$$\ln|y| = x + C \Rightarrow |y| = e^{x+C} = e^C \,.\, e^x$$

elde edilir. e^C yeniden bir keyfi sabit olduğundan e^C yerine yine C yazarsak genel çözümü

$y = C\,e^{x}$

olarak buluruz.

Örnek:

$y' = k(y - 30)$ denkleminin genel çözümünü bulalım.

Çözüm:

$$\frac{dy}{dx} = k(y - 30)\,, \qquad \frac{dy}{y - 30} = k\,dx\,,$$

$$\int \frac{dy}{y - 30} = \int k\,dx + C\,, \qquad \ln|y - 30| = k\,x + C\,, \qquad |y - 30| = e^{kx + C} = e^{C}\,.\,e^{kx}$$

ve genel çözüm

$y = 30 + Ce^{kx}$

olarak bulunur.

Örnek:

100° C ye kadar ısıtılmış bir metal cisim 30° lik bir ortamda soğutulmaktadır. 4 dakika sonra cismin sıcaklığı 70° C olmuşsa, 10 dakika sonra cismin sıcaklığı kaç olur?

Çözüm:

Yukarıda soğumanın diferansiyel denkleminin genel çözümü $y = 30 + C\,e^{kx}$ olarak bulunmuştu. Başlangıçta cismin sıcaklığı 100° C olduğundan $y(0) = 100$ olur. Bu koşuldan yararlanarak C sabitini bulalım:

$$100 = 30 + C\,e^{k.0} \;\Rightarrow\; C = 70.$$

Buna göre, $y = 30 + 70\,e^{kx}$ olur. k yı bulmak için $y(4) = 70$ koşulundan yararlanalım.

$$70 = 30 + 70e^{k.4} \;\Rightarrow\; e^{4k} = \frac{4}{7} \;\Rightarrow\; 4k = \ln\frac{4}{7} \;\Rightarrow\; k = \frac{1}{4}\ln\frac{4}{7}\,,$$

$$k \cong -0{,}14\,.$$

Bunu yukarıda yazarsak $y = 30 + 70\,e^{-0{,}14x}$ bulunur. Burada $x = 10$ yazarsak 10 dakika sonra cismin sıcaklığı

$$y(10) = 30 + 70\,e^{-0{,}14.10} = 30 + 70\,e^{-1{,}4} \cong 47°C$$

olur.

Örnek:

$y' = 3\,(y-2)$ denkleminin $y(0) = 3$ koşulunu sağlayan çözümünü bulalım.

Çözüm:

$$\frac{dy}{dx} = 3\,(y-2) \quad , \quad \frac{dy}{y-2} = 3\,dx \quad , \int \frac{dy}{y-2} = 3\int dx + C \, ,$$

$$\ln\,|y-2| = 3x + C \, .$$

Burada $y(0) = 3$ koşulunu kullanırsak C sabitini bulabiliriz. $x = 0$, $y = 3$ yazarsak

$$\ln\,|3-2| = 3.0 + C \quad \Rightarrow \quad C = \ln 1 = 0$$

bulunur. C nin bu değerini yukarıda yazarsak

$$\ln\,|y-2| = 3x \quad \Rightarrow \quad |y-2| = e^{3x} \quad \Rightarrow \quad y = 2 \pm e^{3x}$$

bulunur. Bu çözümlerden $y(0) = 3$ koşulunu $y = 2 + e^{3x}$ çözümü sağladığından cevap olarak $y = 2 + e^{3x}$ elde edilir.

Örnek:

$y' = y\,.\,\cos x$ denkleminin genel çözümünü bulalım.

Çözüm:

$$\frac{dy}{dx} = y\cos x \quad , \frac{dy}{y} = \cos x\,dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \cos x\,dx + C \Rightarrow \ln|y| = \sin x + C$$

$$\Rightarrow \; |y| = e^{\sin x + C} = e^{C}\,e^{\sin x} \, .$$

Burada e^c yerine yine C yazarsak genel çözüm olarak

$$y = C\,e^{\sin x}$$

bulunur.

?

1) **$y' = xy + x$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.**

2) **$y' + y\tan x = 0$ denkleminin $y(0) = 1$ koşulunu sağlayan çözümünü bulunuz.**

Cevaplarınız $y = C\,e^{\frac{x^2}{2}} - 1$ ve $y = \cos x$ olmalıydı.

4. I.Mertebeden Lineer Diferansiyel Denklemler

I. mertebeden denklemler içerisinde çözüm yolu bulunmuş olan denklem tiplerinden biri de lineer denklemlerdir.

$P(x)$ ve $Q(x)$ bilinen fonksiyonlar olmak üzere

$$\mathbf{y' + P(x) \,.\, y = Q(x)}$$

gibi denklemlere **I. mertebeden lineer diferansiyel denklemler** denir. Fiziksel anlamlara uygun olarak Q(x) fonksiyonuna "**girdi**", elde edilen y(x) çözüm fonksiyonuna ise "**çıktı**" denir. Bu denklemin genel çözüm formülü

$$y = e^{-\int P(x)\,dx}\left[C + \int e^{\int P(x)\,dx} \,.\, Q(x)\,dx\right]$$

gibidir. Bunun genel çözüm olduğunu bu ifadeden y' türevini alıp denklemde yazıp özdeşlik elde ederek görmek mümkündür, fakat bunun üzerinde durmayacağız.

Formülden görüldüğü gibi genel çözümü bulmak için iki tane belirsiz integrali hesaplamak gerekmektedir. Bu integraller

$$r(x) = \int P(x)\,dx \quad \text{ve} \quad R(x) = \int Q(x)\,e^{r(x)}\,dx$$

integralleridir. O zaman genel çözüm

$$y = e^{-r(x)}\ [\,C + R(x)\,]$$

dir.

Örnek:

$y' - \dfrac{y}{x} = x$ denkleminin genel çözümünü bulalım.

Çözüm:

Denklem $y' + \left(-\dfrac{1}{x}\right) . \, y = x$ gibi yazılabildiğinden $P(x) = -\dfrac{1}{x}$, $Q(x) = x$ dir

Buna göre

$$r(x) = \int \left(-\frac{1}{x}\right) dx = -\int \frac{dx}{x} = -\ln|x| , \qquad R(x) = \int x \,.\, e^{-\ln|x|}\,dx ,$$

$$e^{-\ln|x|} = (e^{\ln|x|})^{-1} = |x|^{-1}$$

olduğundan

$$R(x) = \int x \, . |x|^{-1} \, dx = |x|$$

bulunur. Buna göre genel çözüm

$$y = e^{-(-\ln|x|)} \; (C + |x|) = e^{\ln|x|} \; (C + |x|) = |x| \; (C + x)$$

dir.

Örnek:

$y' + y = e^{-x}$ denkleminin genel çözümünü bulalım.

Çözüm:

$P(x) = 1$, $Q(x) = e^{-x}$ olduğundan

$$r(x) = \int 1 \, . \, dx = x \, , \; R(x) = \int e^{-x} \, . \, e^{x} \, . \, dx = \int 1 \, . \, dx = x$$

olur. Buna göre genel çözüm

$$y = e^{-x} \, (C + x)$$

dir.

Örnek:

$y' - y \tan x = \dfrac{1}{\cos x}$ denklemi ve $y(0) = 0$ dan oluşan başlangıç değer problemini çözelim.

Çözüm:

$$P(x) = -\tan x \quad , Q(x) = \frac{1}{\cos x} \quad \text{olduğundan}$$

$$r(x) = \int (-\tan x) \, dx = - \int \tan x \, dx = - \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx$$

Bu integrali hesaplamak için $\cos x = u$ dönüşümünü (değişken değişimini) yaparsak $-\sin x \, dx = du$ olur. Buna göre $\cos x > 0$ varsayımı ile

$$r(x) = - \int \frac{-du}{u} = \int \frac{du}{u} = \ln u = \ln (\cos x$$

$$R(x) = \int \frac{1}{\cos x} \, e^{\ln (\cos x)} \, dx$$

elde edilir.

$e^{\ln(\cos x)} = \cos x$ olduğundan

$$R(x) = \int \frac{1}{\cos x} \cos x \, dx = \int 1 \, . \, dx = x$$

ve genel çözüm

$$y = e^{-\ln(\cos x)} \, (C + x) = (e^{\ln(\cos x)})^{-1} \, (C + x) = (\cos x)^{-1} \, . \, (C+x) = \frac{C + x}{\cos x}$$

dır. Böylece, denklemin genel çözümü $y = \dfrac{C + x}{\cos x}$ olarak bulunur.

Şimdi burada $x = 0$, $y = 0$ yazarsak C yi buluruz:

$$0 = \frac{C + 0}{\cos 0} \Rightarrow 0 = \frac{C}{1} \Rightarrow C = 1 \, . \, 0 = 0$$

$C = 0$ değerini genel çözümde yazmakla

$$y = \frac{0 + x}{\cos x} = \frac{x}{\cos x}$$

çözümünü bulmuş oluyoruz.

Örnek:

$xy' + y = x + 1$, $y(2) = 3$ başlangıç değer problemini çözelim.

Çözüm:

Bu denklemin her iki tarafını x e bölelim.

$$y' + \frac{1}{x} y = \frac{x + 1}{x}$$

Buradan $P(x) = \dfrac{1}{x}$, $Q(x) = \dfrac{x + 1}{x} = 1 + \dfrac{1}{x}$ olur

Buna göre $x > 0$ varsayımı ile

$$r(x) = \int \frac{1}{x} dx = \ln x \ , \ R(x) = \int \left(1 + \frac{1}{x}\right) . \, e^{\ln x} \, dx$$

$$= \int \left(1 + \frac{1}{x}\right) x \, dx = \int (x + 1) \, dx = \frac{x^2}{2} + x$$

bulunur. Genel çözüm

$$y = e^{-\ln x} \left(C + \frac{x^2}{2} + x \right) = x^{-1} \left(C + \frac{x^2}{2} + x \right)$$

$$= \frac{C}{x} + \frac{x}{2} + 1 \quad ; \quad y = \frac{C}{x} + \frac{x}{2} + 1$$

dir.

Genel çözümün formülünde $x = 2$ ve $y = 3$ yazalım:

$$3 = \frac{C}{2} + \frac{2}{2} + 1 \Rightarrow \frac{C}{2} = 1 \Rightarrow C = 2$$

bulunur. $C = 2$ değerini genel çözüm formülünde yazarsak istenen çözümü buluruz:

$$y = \frac{2}{x} + \frac{x}{2} + 1$$

?

y' - 2y + 3 = 0 denkleminin y(0) = 1 koşulunu sağlayan çözümünü bulunuz.

Cevabınız $y = \dfrac{3 - e^{2x}}{2}$ olmalıydı.

5. II. Mertebeden Sabit Katsayılı Lineer Homojen Denklemler

p ve q sabit sayılar olmak üzere

$$y'' + py' + qy = 0$$

gibi denklemlere **II. mertebeden sabit katsayılı lineer homojen deferansiyel denklem** denir.

Biz bu denklemin çözüm yöntemini verip, bunların nereden elde edildiğini tartışmayacağız. Bu tür denklemlerin çözümü **karakteristik denklem** denilen

$$\lambda^2 + p\,\lambda + q = 0$$

ikinci dereceden denklemin çözümüne bağlıdır.

$$\Delta = p^2 - 4\,q$$

diskriminant olmak üzere, üç durum söz konusudur.

1) $\Delta > 0$. İkinci dereceden denklemin

$$\lambda_1 = \frac{-p - \sqrt{\Delta}}{2} \quad , \quad \lambda_2 = \frac{-p + \sqrt{\Delta}}{2}$$

gibi iki gerçel kökü vardır.

Bu durumda denklemin genel çözüm

$$y = C_1\, e^{\lambda_1 x} + C_2\, e^{\lambda_2 x}$$

formülü ile verilir. Burada C_1 ve C_2 keyfi sabitlerdir.

2) $\Delta = 0$. Bu durumda ikinci dereceden denklemin tek kökü var:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{p}{2} = \lambda \; .$$

Diferansiyel denklemin genel çözümü

$$y = (C_1 + C_2\, x)\, e^{\lambda x}$$

formülü ile verilir.

3) $\Delta < 0$. Bu durumda ikinci dereceden denklemin gerçel köklerinin olmamasına rağmen diferansiyel denklemin genel çözümü

$$y = e^{ax}\, (C_1 \cos bx + C_2 \sin bx)$$

formülü ile veriliyor. Burada $a = -\frac{p}{2}$, $b = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}$ dir.

Örnek:

$y'' - 4y = 0$ denkleminin genel çözümünü bulalım.

Çözüm:

Karakteristik denklem

$$\lambda^2 - 4 = 0$$

dir.

Buradan $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 2$ olur. Genel çözüm

$$y = C_1\, e^{-2x} + C_2\, e^{2x}$$

olarak bulunur.

Örnek:

$y'' + y' - 6y = 0$ denkleminin genel çözümünü bulalım.

Çözüm:

$\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$ karakteristik denklemin kökleri $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = 2$ olarak bulunur. Buna göre genel çözüm

$$y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{2x}$$

olur.

Örnek:

$y'' + 6y' + 9y = 0$ denkleminin genel çözümünü bulalım.

Çözüm:

$\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0$ karakteristik denklemin tek kökü var: $\lambda_1 = \lambda_2 = -3$. Buna göre genel çözüm

$$y = C_1 e^{-3x} + C_2 x e^{-3x} = (C_1 + C_2 x) e^{-3x}$$

olur.

Örnek:

$y'' - 6y' + 13y = 0$ denkleminin genel çözümünü bulalım.

Çözüm:

Karakteristik denklem $\lambda^2 - 6\lambda + 13 = 0$ dır. Diskirminant $\Delta = 36 - 52 = -16 < 0$ olur.

$$a = -\frac{p}{2} = -\frac{-6}{2} = 3 \text{ , } b = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} = \frac{\sqrt{-(-16)}}{2} = \frac{\sqrt{16}}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

olduğundan genel çözüm aşağıdaki gibi olur:

$$y = e^{3x} (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$$

Örnek:

$y'' + 9y = 0$ denkleminin genel çözümünü bulalım.

Çözüm:

$\lambda^2 + 9 = 0$ karakteristik denklemin gerçek kökleri yoktur: $\Delta = 0 - 4.9 = -36 < 0$.

$$a = -\frac{p}{2} = -\frac{0}{2} = 0 \quad , \quad b = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} = \frac{\sqrt{36}}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

olduğundan genel çözüm

$$y = e^{0.x} (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$$

dir. $e^{0.x} = e^0 = 1$ olduğundan genel çözüm,

$$y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x$$

olarak bulunur.

1) $y'' + 4y' + 3y = 0$ 2) $y'' + 2y' + y = 0$ 3) $y'' + 2y' + 2y = 0$ denklemlerinin genel çözümünü bulunuz.

?

Cevaplarınız $y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-x}$, $y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}$ ve $y = e^{-x} (C_1 \cos x + C_2 \sin x)$ olmalıydı.

Değerlendirme Soruları

1. $(y'')^3 + (y')^5 + xy = 0$ denkleminin mertebesi aşağıdakilerden hangisidir?
   A. 1
   B. 2
   C. 3
   D. 4
   E. 5

2. 200°C ye kadar ısıtılmış bir metal cisim 20°C lik bir ortamda soğutulmaktadır. Eğer 5 dakika sonra cismin sıcaklığı 100°C olursa, 15 dakika sonra cismin sıcaklığı yaklaşık olarak kaç olur?
   A. 35,8°C
   B. 36,8°C
   C. 37,8°C
   D. 38,8°C
   E. 39,8°C

3. $y' = \frac{y}{x^3}$ denkleminin genel çözümü aşağıdakilerden hangisidir?

A. $y = Ce^{x}$

B. $y = Ce^{-\frac{1}{x^2}}$

C. $y = Ce^{-\frac{1}{2x^2}}$

D. $y = Ce^{-x^2}$

E. $y = Ce^{-x}$

4. $y' - y \cot x = y$ denkleminin genel çözümü aşağıdakilerden hangisidir?

A. $y = Ce^{x}\cos x$

B. $y = Ce^{x}\sin x$

C. $y = Ce^{x}\tan x$

D. $y = Ce^{x}\cot x$

E. $y = C \sin x$

5. $y' = xe^{-y}$, $y(0) = -1$ başlangıç değer probleminin çözümü aşağıdakilerden hangisidir?

A. $y = \ln\left(x + \frac{1}{e}\right)$

B. $y = (x - 1)\, e^{x}$

C. $y = \ln\left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{e}\right)$

D. $y = \ln\left(x^2 + \frac{1}{e}\right)$

E. $y = (x - 1)\, e^{-x}$

6. $y' + \frac{2y}{x} = x^3$ denkleminin genel çözümü aşağıdakilerden hangisidir?

A. $y = \frac{C}{x^2} + \frac{x^3}{6}$

B. $y = \frac{C}{x^2} + \frac{x^4}{6}$

C. $y = \frac{C}{x^2} + \frac{x^2}{6}$

D. $y = \frac{C}{x} + \frac{x^2}{6}$

E. $y = \frac{C}{x} + \frac{x^4}{6}$

7. $y' - y = e^x \cos 2x$, $y(0) = \frac{1}{2}$ başlangıç değer probleminin çözümü aşağıdakilerden hangisidir?

A. $y = \dfrac{e^x\left(1 + \sin 2x\right)}{2}$

B. $y = \dfrac{e^{-x}\left(1 + \sin 2x\right)}{2}$

C. $y = \dfrac{e^x\left(1 + \cos 2x\right)}{2}$

D. $y = \dfrac{e^{-x}\left(1 + \cos 2x\right)}{2}$

E. $y = \dfrac{e^x\left(\sin 2x + \cos 2x\right)}{2}$

8. $2y'' + 5y' - 3y = 0$ denkleminin genel çözümü aşağıdakilerden hangisidir?

A. $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{\frac{1}{2}x}$

B. $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-\frac{1}{2}x}$

C. $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-\frac{1}{2}x}$

D. $y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{\frac{1}{2}x}$

E. $y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{x}$

9. $4y'' + 12y' + 9y = 0$ denkleminin genel çözümü aşağıdakilerden hangisidir?

A. $y = Ce^{-\frac{3}{2}x}$

B. $y = \left(C_1 + C_2 x\right) e^{\frac{3}{2}x}$

C. $y = \left(C_1 + C_2 x\right) e^{3x}$

D. $y = \left(C_1 + C_2 x\right) e^{-3x}$

E. $y = \left(C_1 + C_2 x\right) e^{-\frac{3}{2}x}$

10. $y'' + 2y' + 5y = 0$ denkleminin genel çözümü aşağıdakilerden hangisidir?

A. $y = e^{-x} (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$

B. $y = e^{x} (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$

C. $y = e^{-2x} (C_1 \cos x + C_2 \sin x)$

D. $y = e^{-3x} (C_1 \cos x + C_2 \sin x)$

E. $y = e^{-x} (C_1 \cos x + C_2 \sin 2x)$

Değerlendirme Sorularının Yanıtları

1. B 2. A 3. C 4. B 5. C 6. B 7. A 8. D 9. E 10. A

Yararlanılan ve Başvurulabilecek Kaynaklar

Çoker D., Özer O., Taş K., Küçük Y., Genel Matematik, Cilt 1, 2, Bilim Yayınları, Ankara, 1996.

Demana F., Waits B. K., Precalculus, Addison- Wesley Publishing Com., New York, 1990.

Gaughan E. D., Hall C. E., College Algebra and Trigonometry, Brooks/Cole Publishing Com., Monterey, 1984.

Göğüş M., Koçak Ş, Tayfur C., Üreyen M., Matematik I (Diferansiyel Hesap), Bizim Büro Basımevi, Ankara, 1984.

Göğüş M., Koçak Ş, Üreyen M., Matematik I (İktisadi Uygulamalı), Bizim Büro Basımevi, Ankara, 1986.

Göğüş M., Koçak Ş., Tayfur C., Üreyen M., Matematik II (İntegral Hesap), Bizim Büro Basımevi, Ankara 1985.

Göğüş M., Koçak Ş., Üreyen M., Matematik Fasikül 1, Açıköğretim Fakültesi Yayınları No: 58, Eskişehir, 1986.

Koçak Ş., Üreyen M., Göğüş M., Olgun Ş., Görgülü A., Genel Matematik Fasikül 1, Açıköğretim Fakültesi Yayınları No: 115, Eskişehir, 1990.

Larson R. E., Hostetler R. P., Edwards B. H., Brief Calculus, D.C. Heath and Com., Lexington, 1995.

Musser G.L., Burger W. F., Mathematics for Elementary Theachers, Prentice Hall, New Jersey, 1994.

Saban G., Analize Giriş, İ. Ü. Fen Fakültesi Basımevi, İstanbul, 1989.

Shepley L. Ross, Differential Equations, John Wiley and Sons, New York, 1984.