Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, *yagcimustafa@yahoo.com*

Fonksiyon Türevleri

Giriş. İleri matematiğe girişin ilk adımlarının atıldığı şu anlarda, türev konusunun çok önem arz etmekte olduğunu hatırlatarak, azami özen göstermenizi rica edeceğim. Ben de sizlere yardımcı olmak, yani anlaşılabilir olmak adına yazımıza bir örnekle başlayayım:

Elimizde satmak için aldığımız bir mal var. Gelirimizi bu malı satarak sağlıyoruz. Gün geliyor gelirler yetmiyor, tavsiyeler üzerine, daha çok satabilmek için gazetelere, televizyonlara ilanlar veriyoruz, bakıyoruz ki gerçekten reklam etkili bir şeymiş, satışlar gitgide artıyor. Seviniyoruz, kaz gelecek yerden tavuk esirgenmez misali, reklam giderlerimizi daha çok artırıyoruz, satış gelirlerimizdeki artış reklam giderlerimizdeki artıştan kat be kat fazla… Nazar değmesin!

Biz, şimdi bu olaya matematiksel anlam kazandıracağız. Reklam giderlerine x, satış gelirlerine y dediğimizi farzedelim. Hikayeye göre y değeri x'ten çok daha hızlı büyüdü için y ile x arasında birinci dereceden değil, en azından ikinci dereceden bir ilişki olduğunu sezip, $y = x^2 + 2x + 3$ olsun diyelim. Hiç reklama para harcamasak da satıştan az da olsa bir gelir elde ettiğimiz için, y'yi daima pozitif bir fonksiyona eşitlediğimize dikkat edin.

Sözgelimi, $x = 3$ için $y = f(3) = 3^2 + 2\cdot 3 + 3 = 18$ oluyor. Hemen yorumlayalım: Reklam giderlerine 3 lira harcarsak, satış gelirleri 18 lira oluyor demek, ama bu her zaman 6 katı olur demek değil! O halde şunu merak ediyoruz: y, x'in değil ama y'deki artış x'deki artışın acaba bir katı mı? Değilse bile, belli x'lere çok yakın değerler de bir katı mı? Buna cevabımız evet!

Artışı $\Delta x = 0{,}1$ alsak,

$$x + \Delta x = 3 + 0{,}1 = 3{,}1$$

ve

$$\begin{aligned} y + \Delta y &= f(x + \Delta x) \\ &= f(3{,}1) = 9{,}61 + 6{,}2 + 3 = 18{,}81 \end{aligned}$$

olur ki $\Delta x = 0{,}1$ iken $\Delta y = 0{,}81$ çıktı. $x = 3$'te Δy, Δx'in 8,1 katı çıktı. Peki, x'deki artış daha az olsaydı n'olurdu? Yani $\Delta x \to 0$ için $\Delta y/\Delta x$'in kaça yaklaştığını merak ediyoruz.

Yazım kolaylığı açısından $\Delta x = h$ diyelim.

$$x + \Delta x = x + h$$

ve

$$\begin{aligned} y + \Delta y &= f(x + \Delta x) \\ &= f(x + h) \\ &= (3 + h)^2 + 2.(3 + h) + 3 \\ &= 9 + 6h + h^2 + 6 + 2h + 3 \\ &= h^2 + 8h + 18, \\ \Delta y &= f(x + h) - f(x) \\ &= h^2 + 8h + 18 - 18 \\ &= h^2 + 8h \end{aligned}$$

olduğundan $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{h^2 + 8h}{h} = h + 8$ olur.

Anlayacağınız $\Delta x \to 0$ yani $h \to 0$ için

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} (h + 8) = 8$$

çıkar. O halde $x = 3$ iken x'e sıfıra çok yakın bir artış yaparsak, y'deki artış x'deki artışın 8 katı olacak. İşte bu 8 sayısına $y = f(x)$ kuralıyla belirlenmiş f fonksiyonunun $x = 3$'teki **türevi** diyecek ve bunu $f'(3) = 8$ yazarak göstereceğiz.

Türevin matematiksel tanımı. $y = f(x)$ kuralı ile tanımlı bir fonksiyonun $x = a$'daki türevi

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

olduğundan, $x - a = h$ aldığımızda, $x \to a$ için $h \to 0$ diye

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

olarak tanımlanır.

$y = f(x)$ ile belirli fonksiyonun türevi $f'(x)$ ile gösterildiği gibi $\frac{dy}{dx}$, y'_x, $\frac{d}{dx}(f(x))$ ile de gösterilebilir. Özel bir x_0 noktasındaki türevi de $f'(x_0)$, $\frac{dy}{dx}(x_0)$, $\frac{df}{dx}(x_0)$ veya $y'_x(x_0)$ ile gösterilir.

Örnek. *f: $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $y = f(x) = x^2 + 2x + 3$ fonksiyonunun hem $x = 3$'teki hem de herhangi bir x reel sayı değerindeki türevini bulalım.*

Çözüm: Önce $x = 3$'teki türevini bulacağız.

$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ tanımında a yerine 3 yazacağız, olacak bitecek.

$$f'(3) = \lim_{x\to 3} \frac{f(x)-f(3)}{x-3}$$
$$= \lim_{x\to 3} \frac{x^2+2x+3-(3^2+2\cdot 3+3)}{x-3}$$
$$= \lim_{x\to 3} \frac{x^2+2x-15}{x-3}$$

olup, 0/0 belirsizliğini gidermek için, kesirli ifadeyi çarpanlarına ayırıp sadeleştirelim:

$$f'(3) = \lim_{x\to 3} \frac{(x+5)\cdot(x-3)}{x-3} = 8 \text{ çıkar.}$$

Şimdi de herhangi bir x reel değerine göre fonksiyonunun türevini bulalım.

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

tanımında a yerine x yazacağız:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2+2(x+h)+3-(x^2+2x+3)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}(2x+h+2)$$
$$= 2x + 2.$$

f fonksiyonunun türevinin kuralı ortaya çıktığından ilk soruyu da artık bu kuralı kullanarak bulabiliriz. Bakın:

$f'(x) = 2x + 2$ olduğundan $f'(3) = 2\cdot 6 + 2 = 8$.

Örnek. *f: $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $y = f(x) = 3x^2 + 2$ fonksiyonunun varsa $x = 1$ noktasındaki türevini bulalım.*

Çözüm: Bize $f'(1)$ soruluyor.

$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ tanımında a yerine 1 yazacağız, olacak bitecek.

$$f'(1) = \lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$
$$= \lim_{x\to 1} \frac{3x^2+2-(3\cdot 1^2+2)}{x-1}$$
$$= \lim_{x\to 1} \frac{3x^2-3}{x-1}$$

olup, 0/0 belirsizliğini gidermek için, kesirli ifadeyi çarpanlarına ayırıp sadeleştirelim:

$$f'(1) = \lim_{x\to 1} \frac{3\cdot(x+1)\cdot(x-1)}{x-1} = 6 \text{ çıkar.}$$

Örnek. *f: $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $y = f(x) = |x|$ fonksiyonunun $x = 0$ için türevini bulalım.*

Çözüm: Yine $f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ tanımında a yerine 0 yazacağız.

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{|x|-|0|}{x}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$$

olup, $\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1$ ve $\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1$, yani soldan limit sağdan limite eşit olmadığından limiti yoktur, o halde fonksiyonun $x = 0$ için türevi de yoktur.

Burada şu hususu belirtmekte fayda var: Bir fonksiyonun bir noktada türevi varsa, o fonksiyon mutlaka o noktada süreklidir ancak yukardaki örnekte görüldüğü gibi o noktada sürekli olduğu halde o noktada türevi olmayabilir. Bu söylediğimizi kanıtlayalım:

Teorem. *f : $[a, b] \mapsto \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $x_0 \in (a, b)$ olsun. Eğer f fonksiyonu $x = x_0$ noktasında türevliyse bu noktada süreklidir.*

Kanıt: f fonksiyonu türevli dendiğine göre $f'(x_0)$ diye bir sayının varlığından bahsedebiliriz. Bu sayıya m diyelim.

$$f'(x_0) = m = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$
$$= \frac{\lim_{x\to x_0}[f(x)-f(x_0)]}{\lim_{x\to x_0}(x-x_0)}$$

olduğundan

$$\lim_{x\to x_0}\left[f(x)-f(x_0)\right]=m\cdot\lim_{x\to x_0}(x-x_0)$$

olur.

$$\lim_{x\to x_0}(x-x_0)=0$$

olduğundan

$$\lim_{x\to x_0}\left[f(x)-f(x_0)\right]=0$$

olur. Bu da

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\lim_{x\to x_0}f(x_0)=f(x_0)$$

demektir ki $f(x)$'in $x = x_0$ noktasındaki limit değeri $f(x_0)$'a eşit olduğundan f fonksiyonu bu noktada süreklidir.

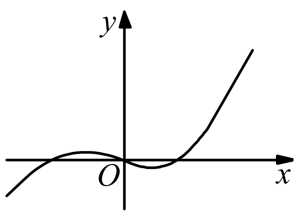
Türevlenebilirlik. Bir $y = f(x)$ kuralıyla belirlenmiş bir fonksiyonu $x = a$ noktasında türevli ise süreklidir, sürekli ise de limiti vardır ama bu önermelerin karşıtı doğru değildir. Yani, limit varsa süreklidir diyemeyiz, olabilir de olmayabilir de, sürekliyse de türevinin olduğunu garanti edemeyiz, olabilir de olmayabilir de.

Türevi varsa süreklidir önermesinin karşıt-tersi de doğrudur: Süreksizse türev yoktur. Anlayacağınız, örneğin, tamdeğer fonksiyonları da tamsayı değerlerinde süreksiz olduğundan bu fonksiyonların bu noktalarda türevsiz olduğunu söyleyebiliriz. Ama sağlamayan örneklerimizin olduğunu da unutmayın. Yetmediyse başka örnek verelim: İşaret fonksiyonu da (sgn fonksiyonu) $x = 0$'da süreksiz, o halde o da $x = 0$ noktasında türevsizdir.

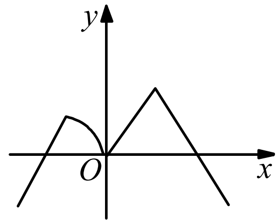
Türevlenebilirlik, tek değişkenli reel değerli bir fonksiyon için kabaca o fonksiyonun sürekli ve grafiğinin "kırılmasız" olmasına karşılık gelen bir özelliktir. Böyle bir f fonksiyonu ve bir a reel sayısı için, eğer

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

limiti varsa, o zaman ***f* fonksiyonu *a* noktasında türevlenebilirdir** denir. Eğer f her reel a değerinde türevlenebilirse, o zaman f fonksiyonu için sadece "türevlenebilir" ifadesi kullanılır.

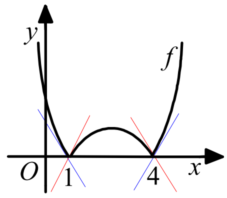


Türevlenebilir bir fonksiyonun grafiği.



0'da türevli olmayan bir fonksiyonun grafiği.

Kırılma noktalarında türevsizliğin sebebine şöyle bir yorum getirsek sanırım daha anlaşılır olacağız: Kırılma noktasından, o noktanın solunda kalan grafiğe çizilen teğet ve o noktanın sağında kalan grafiğe çizilen teğet olmak üzere iki farklı teğet vardır. Bu yüzden türevsizdir diyoruz. Aşağıda buna dair bir çizim var.



$f(x) = |x^2 - 5x + 4|$ fonksiyonun grafiği yukarda çizilmiştir. Bu fonksiyonun grafiği (1, 0) ve (4, 0) noktalarında kırılma yaptığından bu noktalarda sürekli olduğu halde türevi yoktur. Diğer yerlerde türevlidir ama. Çünkü hem sürekli hem de kırılmasız.

Türevlenebilir Olmayan Fonksiyonlar

- Mutlak değer fonksiyonu 0 noktasında türevli değildir. Nedeni, 0'da türevi tanımlayan

$$\lim_{h\to 0}\frac{|0+h|-|0|}{h}$$

limitinin bulunamamasıdır. Diğer her noktada türevlidir.

- $\sqrt[3]{x}$ fonksiyonu da 0'da türevli olmayıp başka her yerde türevli olan bir fonksiyondur. Bu fonksiyonun 0'da türevlenebilir olmayışının nedeni

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{0+h}-\sqrt[3]{0}}{h}$$

limitinin ∞, yani sonsuz olmasıdır. Dolayısıyla mutlak değer fonksiyonunun grafiği 0 noktasında kırıkken, $\sqrt[3]{x}$ fonksiyonunun grafiği 0'da da kırılmasızdır.

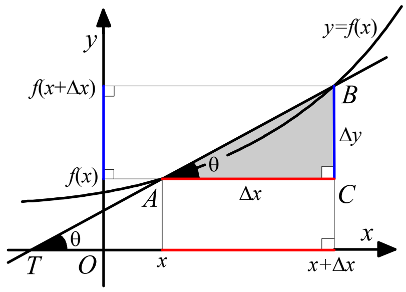
Türevin anlamı. Biraz önce $y = f(x) = x^2 + 2x + 3$ fonksiyonunun türevinin $f'(x) = 2x + 2$ olduğunu bulmuştuk. Hatta $f'(3) = 8$ olduğunu da. Bunu şöyle yorumlamıştık: ‘‘$x = 3$ iken x’e sıfıra çok yakın bir değişim uygularsak, y’deki değişim, x’deki değişimin 8’e çok yakın bir katı olur.’’ Ama bu her zaman 8 katı olur demek değildi, $x = 3$ iken böyle olur demekti. $x = 5$ iken de x’e sıfıra çok yakın bir değişim uygularsak, y’deki değişim, x’deki değişimin $2\cdot5 + 2 = 12$’ye çok yakın bir katı olur.

Genel olarak, y’deki değişikliğin x’deki değişikliğin kaç katı olduğunu $\dfrac{dy}{dx}$ söyler. Öyle olmasa da ifadedeki d harfini ‘‘değişim’’ olarak algılarsanız iyi olur. Bu ifade, matematikte ‘‘y’nin x’e göre türevi’’ demektir. Benzer şekilde x’deki değişikliğin, y’deki değişikliğin kaç katı olduğuna da $\dfrac{dx}{dy}$, yani ‘‘x’in y’ye göre türevi’’ cevap verir. Örneğin, buğdayın fiyatının (B), ekmeğin fiyatına (E) göre nasıl değiştiğini $\dfrac{dB}{dE}$, ekmeğin fiyatının buğdayın fiyatına göre nasıl değiştiğini de $\dfrac{dE}{dB}$ verir.

Bu değerler pozitif olduğunda paydadakinin fiyatı arttığında paydakinin de fiyatının arttığını anlarız, negatif olduğunda paydadakinin fiyatı arttığında paydakinin fiyatının azaldığını anlarız. Peki ya sıfır olursa? O zaman paydakinin fiyatı sabit demek olur.

Eğer değişkenin biri yol (x), diğeri de zaman (t) ise, yolun zamana göre nasıl değiştiğini $\dfrac{dx}{dt}$ ile, yani yolun zamana göre türevine bakarak anlarız. Fizikte bu ifadeye ‘**anlık hız**’ diye özel bir isim takılır ve v ile gösterilir. Hızın zamana göre türevini de $\dfrac{dv}{dt}$ verir ki, fizikte buna da ‘**anlık ivme**’ denir ve a ile gösterilir.

Türevin geometrik anlamı. Tanım olarak $y = f(x)$’nin x’e göre türevi, $\lim_{x\to0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ idi. Şimdi bu f fonksiyonunun grafiğini çizelim. Üzerinde hangi noktayı alırsak alalım, o noktada fonksiyonun türevini bulabilelim diye sürekli bir şey çizelim ama.



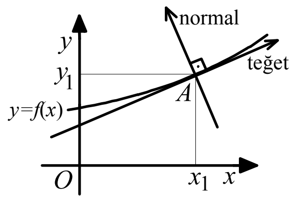
Bu fonksiyon üstünde yukardaki gibi $A(x, f(x))$ ve $B(x + \Delta x, f(x + \Delta x))$ noktalarını işaretleyim. Bir eğri üzerinde alınan değişik iki noktayı birleştiren doğru parçasına, o eğriye ait bir **kiriş** dendiğini hatırlayarak, AB kirişinin eğiminin

$$m_{AB} = \tan(BTO) = \tan(BAC) = \tan\theta^{o} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

olduğunu görünüz. Şekilden $\Delta x\to0$ için B’nin eğri üzerinde devamlı A’ya yaklaştığını ve sonunda böyle bir durumda AB kirişinin, fonksiyona A noktasında teğet olan bir doğruya dönüşeceğini fark ediniz.

İşte bu yüzden, ‘‘*Bir fonksiyonun herhangi bir noktasındaki türevi, fonksiyona o noktada teğet olan doğrunun eğimidir*’’ demekte bir mahzur yoktur.

O halde $f'(3) = 8$ eşitliği, bu anlamda, ‘‘f’nin üstünde apsisi 3 olan noktadan f’ye çizilen teğetin eğimi 8’dir’’ demek olur.



Yukardaki bilgi sayesinde bir eğrinin üzerindeki bir noktadan eğriye çizilen teğetin ve normalin[1] denklemi kolaylıkla bulunabilir.

$A(x_1, y_1)$ noktasından geçen ve eğimi m olan bir doğrunun denkleminin $y - y_1 = m.(x - x_1)$ olduğunu biliyoruz. Teğetin eğimi $m_T = f'(x_1)$ olduğundan, normalin eğimi de $m_N = \dfrac{-1}{m_T} = \dfrac{-1}{f'(x_1)}$ olduğundan **teğetin denklemi**

$$y - y_1 = m_T\cdot(x - x_1)$$

ve **normalin denklemi**

$$y - y_1 = m_N\cdot(x - x_1)$$

şeklindedir.

[1] A’daki teğete A noktasında dik olan doğruya, eğrinin A’daki **normali** denir.

Örnek. *Denklemi* $y = f(x) = x^2 + 2x + 3$ *olan eğrinin üzerindeki* $(3, p)$ *noktasından eğriye çizilen teğetin ve normalin denklemlerini bulunuz.*

Çözüm: $(3, p)$ eğrinin üzerinde olduğundan eğrinin denklemini sağlaması gerekir, o halde $3^2 + 2.3 + 3 = p = 18$'tir. Teğetin eğimi $m_T = f'(3) = 8$ olduğundan teğet denklemi $y - 18 = 8\cdot(x-3)$ yani $y = 8x - 6$'dır, ayrıca normalin eğimi $m_N = \dfrac{1}{m_T} = \dfrac{1}{f'(x_1)} = \dfrac{-1}{8}$ olduğundan normalin denklemi de $y - 18 = \dfrac{-1}{8}\cdot(x-3)$ yani $x + 8y = 147$'dir.

Görüldüğü gibi türevin, bir değişkenin bir diğer değişkene göre nasıl değiştiğini ve bir eğrinin üzerindeki bir noktadan çizilen teğetin eğimini bulmak gibi temel iki görevi vardır. Türev, bu bakımdan işletme, mühendislik, … gibi dallarda çok sık olarak kullanılır. Ancak türevin tanımından giderek bulunuşu biraz zaman almaktadır. Bundan dolayı türevle ilgili çalışma şeklimizi şimdi biraz değiştireceğiz. Şu ana kadar bir fonksiyonunun türevinin nasıl bulunduğunu gördük, şimdi bu gördüklerimi süreyi kısaltmak adına kurallaştıracağız. Başlarken sadece polinom denklemler ve üslü-köklü fonksiyonlar üzerinde duracak, sinüs, kosinüs, logaritma, … gibi cebirsel olmayan fonksiyonlar üzerinde durmayacağız. Daha sonraları cebirsel olmayan fonksiyonlarında türev alma kurallarını verecek, böylelikle her türlü fonksiyonun türevini alabilir olacağız. En sonda ise gösterdiklerimizin türlü türlü uygulamalarına bakacağız, öyle ya, nerde kullanacağını bilmediğin bilginin ne önemi var! İşte oralarda türevin önemini daha iyi idrak edeceksiniz.

Türev Alma Kuralları. Önce üslü ve köklü fonksiyonların türevlerini almayı öğreneceğiz. Yazının bundan sonraki bölümünde $y = f(x)$ fonksiyonunun türevi denilince, aksi belirtilmediği sürece y'nin x'e göre türevi anlatılmak istenmektedir. Hatta bu bazen kısaca y', $\dfrac{dy}{dx}$ veya $f'(x)$ yazılarak gösterilecektir.

***y* = *f*(*x*) = *a*·*x*^n^ fonksiyonunun türevi.** a ve n birer reel sayı olmak üzere,

$$y = a\cdot x^n \text{ ise } y' = n\cdot a\cdot x^{n-1}$$

Kanıt: Türev tanımından rahatlıkla kanıtlanır:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{a(x+h)^n - ax^n}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(a\cdot\frac{(x+h)^n - x^n}{h}\right)$$

$$= a\cdot\lim_{h\to 0}\frac{(x+h-x)((x+h)^{n-1}x^0 + (x+h)^{n-2}x + \ldots + (x+h)^0 x^{n-1}}{h}$$

$$= a\cdot\lim_{h\to 0}\frac{h\left((x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-1} + \ldots + (x+h)^{n-1}\right)}{h}$$

$$= a\cdot\lim_{h\to 0}\left((x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-1} + \ldots + (x+h)^{n-1}\right)$$

$$= a\cdot\lim_{h\to 0}\left(n\cdot(x+h)^{n-1}\right)$$

$$= a\cdot n\cdot x^{n-1}$$

Aşağıda buna dair örnekler bulacaksınız:

1. $y = x^2$ ise $y' = 2x$,
2. $y = x^3$ ise $y' = 3x^2$,
3. $y = x^{-1}$ ise $y' = -1\cdot x^{-2}$,
4. $y = \sqrt{x}$ ise $y = x^{1/2}$ olduğundan

$$y' = \frac{1}{2}\cdot x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2\sqrt{x}},$$

5. $y = \dfrac{4}{\sqrt[3]{x^2}}$ ise $y = 4\cdot x^{-2/3}$ olduğundan

$$y' = 4\cdot\frac{-2}{3}\cdot x^{\frac{-2}{3}-1} = \frac{-8}{3}\cdot x^{\frac{-5}{3}} = \frac{-8}{3\cdot\sqrt[3]{x^5}},$$

6. $y = \sqrt{x\sqrt{x}}$ ise $y = x^{3/4}$ olduğundan

$$y' = \frac{3}{4}\cdot x^{\frac{3}{4}-1} = \frac{3}{4}\cdot x^{\frac{-1}{4}} = \frac{3}{4\cdot\sqrt[4]{x}},$$

7. $y = 5$ ise $y = 5\cdot x^0$ olduğundan $y' = 0$,
8. $y = x$ ise $y' = 1$,
9. $y = 4x$ ise $y' = 4$.

Uyarı. Çok sık kullanıldıkları için aşağıdakileri hemen hafızanızı kaydedin.

$y = \sqrt{x}$ ise $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$,

$y = \dfrac{1}{x}$ ise $y' = \dfrac{-1}{x^2}$,

$y = a$ ise $y' = 0$, $(a\in\mathbb{R})$

$y = ax$ ise $y' = a$. $(a\in\mathbb{R})$

Sabitin türevinin sıfır olduğuna dikkat ettiniz değil mi?

Benzer şekilde

$$(\sin 17^o)' = 0,$$
$$(e^3)' = 0,$$
$$(\ln 3)' = 0,$$

$\pi' = 0$,
$(\log_3 7)' = 0$,
$\sqrt[3]{7}\,' = 0, \ldots$

Aşağıdaki tabloyu doldurunuz.

$y = f(x)$	$y' = f'(x)$
x^7	
$3 \cdot x^7$	
$(3x)^7$	
$\sqrt{x^5}$	
$\sqrt[3]{x^4}$	
$\frac{3}{x}$	
$-\frac{2}{x^5}$	
$\sqrt[3]{x\sqrt{x}}$	
$\sqrt{7} + \tan 15^o$	

Toplam veya farkların türevi. Bir toplamın (veya farkın) türevi, toplamı (farkı) oluşturan fonksiyonların toplamına (farkına) eşittir.
Yani,

$y = f(x) + g(x) - t(x)$ ise $y' = f'(x) + g'(x) - t'(x)$.

Kanıt: Yine türev tanımından gideceğiz.

$(f + g - t)'(x) =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \frac{(f+g-t)(x+h) - (f+g-t)(x)}{h}$

$= \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) + g(x+h) - t(x+h) - f(x) - g(x) + t(x)}{h}$

$= \lim\limits_{h \to 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h} - \frac{t(x+h) - t(x)}{h} \right)$

$= f'(x) + g'(x) - t'(x)$

Aşağıda buna ait örnekler bulacaksınız:

1. $y = 3x^2 - 4x^3 + 2$ ise $y' = 6x - 12x^2$,

2. $y = 2x^2 + \frac{x}{3} + \sqrt{x}$ ise $y' = 4x + \frac{1}{3} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$,

3. $y = x^2 + 2x + 3 - \ln 4$ ise $y' = 2x + 2$.

Aşağıdaki tabloyu doldurunuz.

$y = f(x)$	$y' = f'(x)$
$x^7 + x^3$	
$3 \cdot x^7 - 2x + 5$	
$\frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}$	
$\pi x - \sqrt{x^5} + \sin 13^o$	

Örnek. *$f(x) = x^2 - 5x + 4$ ile tanımlı f fonksiyonunun $x + y - 3 = 0$ doğrusuna paralel olan teğetinin değme noktasını bulunuz.*
Çözüm: Paralelliğin sonucu olarak, $x + y - 3 = 0$ doğrusunun eğimi -1 olduğundan teğetin eğimi de -1 olur. Teğetin değme noktası $(a, f(a))$ ise eğimi $f'(a)$ olur. $f'(x) = 2x - 5$ olduğundan $f'(a) = 2a - 5 = -1$, dolayısıyla $a = 2$ bulunur. O halde $f(a) = f(2) = 2^2 - 5 \cdot 2 + 4 = -2$ olduğundan değme noktası $(2, -2)$'dir.

Örnek. *Denklemi $y = f(x) = \frac{6}{\sqrt{x}}$ olan eğrinin, apsisi 3 olan noktasındaki teğetinin eğim açısının ölçüsü kaçtır?*
Çözüm: $f'(x) = \frac{-3}{\sqrt{x^3}}$ olduğundan $f'(3) = \frac{-1}{\sqrt{3}}$ olur. Bu değer teğetin eğimi olduğundan eğim açısının ölçüsü 150^o olmalıdır.

Örnek. *Hareket denklemi $x = \frac{1}{3}t^3 - t$ olan bir hareketlinin harekete başladığı andan 3 saniye sonraki hızını ve ivmesini bulunuz.*[2]
Çözüm: Her zamanki gibi hızı v, ivmeyi de a ile gösterelim. $v = \frac{dx}{dt} = (\frac{1}{3}t^3 - t)' = t^2 - 1$ ve $t_0 = 3$ olduğundan tam o andaki hız $v = 3^2 - 1 = 8$ *m/sn* dir. Diğer yandan $a = \frac{dv}{dt} = (t^2 - 1)' = 2t$ olduğundan o andaki ivme $a = 2 \cdot 3 = 6$ *m/sn*^{2} olur.

Bir çarpımın türevi. $u = f(x)$, $v = g(x)$ ve $w = h(x)$ kuralı ile belirli fonksiyonlar verildiğinde

[2] Soruda x uzaklık anlamında olup metre cinsinden, t de zaman anlamında olup saniye cinsindendir.

$y = u\cdot v$ *ise* $y' = u'\cdot v + v'\cdot u$

olur. Bunu ''*bir çarpımın türevi, birincinin türevi çarpı ikinci, artı, ikincinin türevi çarpı birinci*'' diye akılda tutarız.

Türev alma konusunda çok önem arz eden bu teoremi kanıtlayarak başlayalım:

Teorem. $[f(x)\cdot g(x)]' = f(x)\cdot g'(x) + g(x)\cdot f'(x)$.

Kanıt: Yine türev tanımını kullanacağız.

$$\frac{d}{dx}[f(x)\cdot g(x)] = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)\cdot g(x+h) - f(x)\cdot g(x)}{h}$$

olduğunu biliyoruz. Şimdi limitini aradığımız kesirli ifadenin payına $f(x+h)\cdot g(x)$ ekleyip çıkaracağız:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)\cdot g(x+h) - f(x)\cdot g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x+h)g(x)}{h} + \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x)}{h}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[f(x+h)\frac{g(x+h)-g(x)}{h} + g(x)\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right]$$

$$= f(x)\cdot g'(x) + g(x)\cdot f'(x)$$

Benzer şekilde;

$y = u\cdot v\cdot w$ *ise* $y' = u'\cdot v\cdot w + u\cdot v'\cdot w + u\cdot v\cdot w'$

olur. Bunu da ''*üçlü çarpımın türevi, birincinin türevi çarpı diğerleri, artı, ikincinin türevi çarpı diğerleri, artı, üçüncünün türevi çarpı diğerleri*'' şeklinde aklınızda tutabilirsiniz.

İkili çarpımın türevini kullanarak bunu da rahatlıkla kanıtlayabilirsiniz. Sizin yerinize ben yapayım:

Üçlü çarpımın kanıtı: $y = u\cdot v\cdot w$ eşitliğini $y = (u\cdot v)\cdot w$ gibi düşüneceğiz.

$$\begin{aligned} y' &= (u\cdot v)'\cdot w + w'\cdot(u\cdot v) \\ &= (u'\cdot v + v'\cdot u)\cdot w + w'\cdot(u\cdot v) \\ &= u'\cdot v\cdot w + u\cdot v'\cdot w + u\cdot v\cdot w' \end{aligned}$$

Örnek. $y = x^n$ *ise* $y' = n\cdot x^{n-1}$ *olduğunu kanıtlayınız.*

Çözüm: Kanıtımız biraz önce kanıtladığımız çarpımın türevi teoremini ve tümevarımı kullanacak. $n = 1$ için doğru olduğu su götürmez. O halde $y = x^n$ ise $y' = n\cdot x^{n-1}$ önermesini doğru kabul ederek $y = x^{n+1}$ *ise* $y' = (n+1)\cdot x^n$ olduğunu gösterebilirsek işimiz bitmiş olacak.

$$\begin{aligned} y = x^{n+1} \Rightarrow y = x^n\cdot x \Rightarrow y' &= n\cdot x^{n-1}\cdot x + 1\cdot x^n \\ &= n\cdot x^n + 1\cdot x^n \\ &= (n+1)\cdot x^n \ \square \end{aligned}$$

Ama bu kanıt sadece n doğal sayıları için teoremin doğruluğunu kanıtladı bize, ya n rasyonelse? Korkmayın, o zaman da sağlar[3] ama şu an ki bilgilerle onu bu şekilde kanıtlayamayız, kapalı fonksiyonların türevi konusunda onu da kanıtladık.

Örnek. $y = (x^3 + 5x)\cdot(x^2 - 1)$ *ise* y' *nedir*?

Çözüm: İki yol gösterelim.

Birinci yol. Çarpımın türevinin kuralını ezberlemiştik: $y' = (3x^2 + 5)\cdot(x^2 - 1) + (2x)\cdot(x^3 + 5x)$ toplamı düzenlenirse $y' = 5x^4 + 12x^2 - 5$ bulunur.

İkinci yol. $y = x^5 + 4x^3 - 5x$ olduğundan $y' = 5x^4 + 12x^2 - 5$ bulunur.

Örnek. *a bir reel sayı olmak üzere*, $y = a\cdot x^n$ *için* y' *değerini çarpımın türevi kuralını kullanarak bulunuz.*

Çözüm: $y' = 0\cdot x^n + n\cdot x^{n-1}\cdot a$ olduğundan $y' = n\cdot a\cdot x^{n-1}$ olur.

Örnek. $y = x^3$ *ise* y' *değerini çarpımın türevi kuralını kullanarak bulunuz.*

Çözüm: Bu ifadeyi ikili çarpım gibi de düşünebiliriz, üçlü çarpım gibi de.

Birinci yol. $y = x^3 = x^2\cdot x$ diye $y' = 2x\cdot x + 1\cdot x^2 = 3x^2$ olur.

İkinci yol. $y = x^3 = x\cdot x\cdot x$ diye $y' = 1\cdot x\cdot x + x\cdot 1\cdot x + x\cdot x\cdot 1 = 3x^2$ olur.

Aşağıdaki tabloyu doldurunuz.

$y = f(x)$	$y' = f'(x)$
$x^7\cdot(x^3 + 1)$	
$(3\cdot x^7 - 2x + 5)\cdot(x - 1)$	
$\frac{2}{x}\cdot(1 - \frac{3}{x^2})$	
$(\pi x + 2)\cdot(3 - \sqrt{x^5})$	

Örnek. $x - y - 1 = 0$ *doğrusu f fonksiyonunun grafiğine* $(3, b)$ *noktasında teğettir.* $g(x) = x\cdot f^2(x)$ *ile tanımlı g fonksiyonunun apsisi* 3 *olan noktasındaki teğetinin eğimi kaçtır*?

Çözüm: $(3, b)$ noktası f fonksiyonunun üzerinde olduğundan $3 - b - 1 = 0$ yani $b = 2$'dir. Yani $f(3)$

[3] İnanmayan veya sabredemeyen türev tanımını kullanarak kanıtlayabilir.

= 2'ymiş. Diğer yandan f fonksiyonunun teğetinin eğimi, $x - y - 1 = 0$ doğrusunun eğimi olacağından $f'(3) = 1$'dir. g fonksiyonunun 3 apsisli noktasındaki teğetinin eğimi de $g'(3)$ olduğundan $g'(x)$ kuralını bulup, x yerine 3 yazmalıyız.

$$g(x) = x \cdot f^2(x)$$
$$g'(x) = 1 \cdot f^2(x) + 2 \cdot f(x) \cdot f'(x) \cdot x$$
$$g'(3) = 1 \cdot f^2(3) + 2 \cdot f(3) \cdot f'(3) \cdot 3$$
$$= 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 = 16$$

Bir bölümün türevi. $u = f(x)$ ve $v = g(x)$ ile belirli fonksiyonlar verildiğinde,

$$y = \frac{u}{v} \text{ ise } y' = \frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2}$$

olur. Bunu, ''*bir bölümün türevi, birincinin türevi çarpı ikinci, eksi, ikincinin türevi çarpı birinci, bölü, ikincinin karesi*'' diye akılda tutarız.[4]

Bölüm türevi de çarpım türevi kadar önemlidir. Çarpıma yaptığımız kanıtın aynısını uygulayarak bu eşitliği kanıtlamanızda fayda var diyeceğim ama size güven olmaz, yine ben yapayım:

Kanıt: Yine türev tanımını kullanacağız.

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{f(x+h)}{g(x+h)} - \dfrac{f(x)}{g(x)}}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x+h)}{h \cdot g(x) \cdot g(x+h)}$$

olduğunu biliyoruz. Şimdi limitini aradığımız kesirli ifadenin payına $f(x) \cdot g(x)$ ekleyip çıkaracağız:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x+h)}{h \cdot g(x) \cdot g(x+h)} =$$
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x+h) + f(x) \cdot g(x)}{h \cdot g(x) \cdot g(x+h)} =$$
$$\lim_{h \to 0} \left[\frac{[f(x+h) - f(x)] \cdot g(x)}{h \cdot g(x) \cdot g(x+h)} - \frac{[g(x+h) - g(x)] \cdot f(x)}{h \cdot g(x) \cdot g(x+h)}\right]$$
$$\lim_{h \to 0} \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot \frac{g(x)}{g(x) \cdot g(x+h)} - \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \cdot \frac{f(x)}{g(x) \cdot g(x+h)}\right]$$
$$= \frac{f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{g^2(x)}$$

Örnek. $y = \dfrac{x^3 + 5x}{\sqrt{x} + 1}$ *ise* y' *değerini bulunuz.*

Çözüm: Hemen bölüm türevi kuralını uygulayalım:

$$y' = \frac{(3x^2 + 5) \cdot (\sqrt{x} + 1) - (\dfrac{-1}{2\sqrt{x}}) \cdot (x^3 + 5x)}{(\sqrt{x} + 1)^2}.$$

Aşağıdaki tabloyu doldurunuz.

$y = f(x)$	$y' = f'(x)$
$\dfrac{x^4}{x^3 + 1}$	
$\dfrac{2x}{x + 1}$	
$\dfrac{\sqrt[3]{x} + x}{x - 1}$	
$\dfrac{x^2 - 1}{\sqrt{x} - 2}$	

Bölüm türevinde pratik bir yol. Göstereceğimiz bu yol ikinci dereceden polinom denklemlerin bölümlerinin türevleriyle ilgilidir. Diğer dereceden ifadelere de uygulanabilir, onu size alıştırma olarak bırakalım.

$y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{dx^2 + ex + f}$ ise y' değerini bir hesaplayalım bakalım:

$$y' = \frac{(2ax + b)(dx^2 + ex + f) - (2dx + e)(ax^2 + bx + c)}{(dx^2 + ex + f)^2}$$

çıkar. Ben sizin yerinize düzenledim:

$$y' = \frac{(ae - bd)x^2 + 2(af - dc)x + (bf - ec)}{(dx^2 + ex + f)^2}$$

çıktı. Matris ve determinant konusunu bilir misiniz bilmem. Bilenler $ae - bd$, $af - dc$ ve $bf - ec$ değerlerinin nelerin determinantı olduğunu hemen anlamışlardır. Bilmeyenlere de $\begin{vmatrix} k & l \\ m & n \end{vmatrix} = kn - ml$ tanımını vererek[5], olayı izah edelim:

Türevin payında x^2'nin katsayısı $\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}$, x'in katsayısı $2.\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}$, sabit terim ise $\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}$ oluyor. Bu sayıların nasıl seçeceğini anlatacak değilim, y değerinden bunu anlayamayacak adam olduğuna inanmıyorum.

[4] Birinci ''pay'', ikinci ''payda'' manasında kullanılmıştır.

[5] İlerde bu ifadeye **ikinci mertebeden determinant** diyeceğiz.

Örnek. $y = \dfrac{3x^2-4x+5}{x^2+x-1}$ *ise y' değerini bulalım.*

Çözüm: $y' = \dfrac{\begin{vmatrix}3 & -4\\1 & 1\end{vmatrix}x^2 + 2\begin{vmatrix}3 & 5\\1 & -1\end{vmatrix}x + \begin{vmatrix}-4 & 5\\1 & -1\end{vmatrix}}{(x^2+x-1)^2}$

olduğundan, hesap yapılırsa $y' = \dfrac{7x^2-16x-1}{(x^2+x-1)^2}$

bulunur.

Uyarı. Birinci dereceden polinom denklemlerin bölümleriyle ilgili pratik kuralı da dayanamayarak veriyorum:

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} \text{ ise } y' = \frac{\begin{vmatrix}a & b\\c & d\end{vmatrix}}{(cx+d)^2} = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}.$$

Örnek. $y = f(x) = \dfrac{ax^2+2b}{3x+1}$ *denklemi ile belirli eğrinin* (1, 2) *noktasındaki teğeti, denklemi* $x + 4y = 5$ *olan doğruya dik olduğuna göre a ile b'yi bulunuz.*

Çözüm: $f(1) = 2$ olduğundan $\dfrac{a+2b}{3+1} = 2$ yani $a + 2b = 8$'dir. Bu kenarda beklesin. $x + 4y = 5$ doğrusunun eğimi $-1/4$ olduğundan bu doğruya dik olan doğrunun eğimi 4'tür.

Buradan anlaşılıyor ki, $f'(1) = 4$.

$f'(x) = \dfrac{3ax^2+2ax-6b}{(3x+1)^2}$ olduğundan $f'(1) = \dfrac{3a+2a-6b}{(3+1)^2} = 4$ yani $5a - 6b = 64$ olur. İlk bulduğumuz eşitlikle bunu birlikte çözersek $a = 11$ ve $b = -3/2$ olarak bulunur.

Aşağıdaki tabloyu doldurunuz.

$y = f(x)$	$y' = f'(x)$
$\dfrac{x+2}{x+1}$	
$\dfrac{2x-3}{x+1}$	
$\dfrac{x^2+x+2}{2x^2-3x-1}$	
$\dfrac{x^2-1}{-x^2+2x}$	

Parçalı fonksiyonların türevleri. Parçalı fonksiyon diye neye dediğimizi biliyorsunuz değil mi? Değişik aralıklarda değişik fonksiyonmuş gibi davranan fonksiyonlara. Şimdi böyle fonksiyonların türevlerine örnekler vereceğiz.

Örnek. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x^3, & x < 2 \\ 5x^2+4, & 2 \le x < 5 \\ 4x^2-1, & x \ge 5 \end{cases}$

olarak tanımlanıyor. Buna göre $f'(-3), f'(3)$ ve $f'(7), f'(2)$ ve $f'(5)$ değerlerini bulunuz.

Çözüm: Fonksiyonun içinde bulunduğu aralıkta davrandığı kurala göre türevler alacağız.

x	$(-\infty, 2)$	$[2, 5)$	$[5, \infty)$
$f(x)$	x^3	$5x^2+4$	$4x^2-1$
$f'(x)$	$3x^2$	$10x$	$8x$

Yukardaki tablodan da anlaşılacağı üzere;

$f'(-3) = 3\cdot(-3)^2 = 27$,

$f'(3) = 10\cdot3 = 30$,

$f'(7) = 8\cdot7 = 56$,

$x = 2$ ve $x = 5$ için fonksiyonun kuralları belli ama bu noktalarda fonksiyon süreksiz olduğundan türevi yoktur.

Burada şöyle bir soru akla gelebilir: O noktalarda, örneğin $x = 2$'de fonksiyon sürekli olsaydı, hangisinin kuralına göre türev alacaktık? Söyleyeyim: Eğer türev kuralları aynı değilse (ki burada $3x^2$ ve $10x$ olarak farklılar), yine türev yoktur diyecektik, bitecekti.

Aşağıdaki tabloyu doldurunuz.

f	$f'(1)$	$f'(4)$	$f'(2)$
$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \le 2 \\ 2x, & x > 2 \end{cases}$			
$f(x) = \begin{cases} x^3, & x \le 2 \\ x^2+8x, & x > 2 \end{cases}$			

Türev almada zincir kuralı. $y_1 = x^2$'nin türevinin $y_1' = 2x$ olduğunu biliyoruz. Ama $y_2 = (x^3 - 5)^2$'nin türevi için $y_2' = 2\cdot(x^3 - 5)$ diyemeyiz. Çünkü gerçekte $y_2 = x^6 - 10x^3 + 25$ olduğundan $y_2' = 6x^5 - 30x^2$ olmalıdır.

$y_2 = (x^3 - 5)^2$'nin türevini alırken ifadeyi açacağımıza değişken değiştirerek de çözebiliriz. Şöyle ki: $u = x^3 - 5$ olsun. $y = u^2$ olup, $y_u' = \dfrac{dy}{du} = 2u =$

$2\cdot(x^3 - 5)$ çıkar. Bu ifadeyi u'nun x'e göre türeviyle çarparsak, ki bu $u_x' = 3x^2$'dir,

$$y_x' = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} = 2\cdot(x^3 - 5)\cdot 3x^2 = 6x^5 - 30x^2.$$

Şimdi burada yaptığımız işlemleri genelleyeceğiz:

$u = f(x)$, $y = g(u) = g(f(x))$ olduğunda

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} \text{ veya } y_x' = y_u'\cdot u_x'$$

Bu kurala türev almada **zincir kuralı** denir. Bunu akılda tutmak için eşitliğin sağ tarafındaki ''*du*''ların sadeleştiğini düşünürüz.

Örnek. $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{7x^2+5x-1}}$ *ise y' nedir?*

Çözüm: y' derken ''y'nin x'e göre türevi''nin kastedildiğini biliyoruz, yani $\dfrac{dy}{dx}$ soruluyor.

$7x^2 + 5x - 1 = u$ olsun. $y = u^{-1/3}$ olur ki;

$\dfrac{dy}{du} = \dfrac{-1}{3\cdot\sqrt[3]{u^4}}$ olur. Diğer yandan $\dfrac{du}{dx} = 14x + 5$ olduğundan,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} = \frac{-1}{3\cdot\sqrt[3]{u^4}}\cdot(14x+5)$$

$$= \frac{-1}{3\cdot\sqrt[3]{(7x^2+5x-1)^4}}\cdot(14x+5)$$

Zincir kuralıyla birlikte $f(x)$'in türevinin kuralı bilinince $f(nesne)$'nin türevini nasıl bulunacağı anlaşılmış oluyor:

$$[f(g(x))]' = f'(g(x))\cdot g'(x)$$

Biz bir de tanımdan faydalanarak kanıtlayalım:

$$\lim_{h\to 0}\frac{(f\circ g)(x+h)-(f\circ g)(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{h}$$

Limitini aradığımız bu kesri $g(x + h) - g(x)$ ile çarpıp bölelim.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{g(x+h)-g(x)}\cdot\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right]$$

$$= f'(g(x))\cdot g'(x)$$

İlerde bileşke fonksiyonların daha büyük mertebeden türevlerinin nasıl alınacağını da anlattık.

Örnekler.

$y = g^5(x)$ ise $y' = 5\cdot g^4(x)\cdot g'(x)$

$y = (2x + 8)^6$ ise $y' = 6\cdot(2x + 8)^5\cdot 2$

$y = (3 - x)^{11}$ ise $y' = 11\cdot(3 - x)^{10}\cdot(-1)$

$y = \sqrt{g(x)}$ ise $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{g(x)}}\cdot g'(x)$

$y = \sqrt{x^2+\sqrt{x}}$ ise $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x^2+\sqrt{x}}}\cdot\left(2x + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)$

$y = \dfrac{1}{g(x)}$ ise $y' = \dfrac{-1}{g^2(x)}\cdot g'(x)$

$y = \dfrac{1}{x^2+10x}$ ise $y' = \dfrac{-1}{(x^2+10x)^2}\cdot(2x + 10)$

Zincirleme türev alma kuralı değişken sayısından bağımsızdır. Yani y değişkeni u cinsinden, u değişkeni t cinsinden, t değişkeni m cinsinden, m değişkeni de x cinsinden verilmişse, y değişkenini x cinsinden yazabilir ve türevini alabiliriz.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dt}\cdot\frac{dt}{dm}\cdot\frac{dm}{dx}$$

yazmakta bir mahzur yoktur.

Örnek. $y = \sqrt{u}$, $u = t^2 + 1$, $t = x^3 + 2x - 3$ *ise* $\dfrac{dy}{dx}$ *değeri nedir?*

Çözüm: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dt}\cdot\dfrac{dt}{dx}$ olduğundan

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot(2t)\cdot(3x^2+2)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{t^2+1}}\cdot(2x^3+4x-6)\cdot(3x^2+2)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{(x^3+2x-3)^2+1}}\cdot(2x^3+4x-6)\cdot(3x^2+2)$$

Aşağıdaki tabloyu doldurunuz.

$y = f(x)$	$y' = f'(x)$
$(2x^3+x)^4$	
$\sqrt{x^4-2x^3}$	
$\dfrac{3}{x^2+10x-3}$	
$\sqrt[3]{x+\sqrt{x}}$	

Yüksek mertebeden türevler. $\dfrac{dy}{dx}$ ifadesinin ‘‘y’nin x’e göre türevi’’ demek olduğunu belirtmiştik. Bu ifade $\dfrac{d}{dx}(y)$ şeklinde de yazılabilir. Örneğin, $\dfrac{d}{dx}(x^3+7x)$ yazılımından ‘‘$(x^3 + 7x)$’in x’e göre türevi’’ anlaşılmalıdır. Eğer $\dfrac{d}{dt}(t^3+7t)$ olsaydı, ‘‘$(t^3 + 7t)$’nin t’ye göre türevi’’ anlaşılmalıydı. Benzer şekilde $\dfrac{d}{dx}(t^3+7t)$ yazılımı da ‘‘$(t^3 + 7t)$’nin x’e göre türevi’’ olduğunu anlatır.

$\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)$ ifadesinin ne anlattığını sanırım artık anlamış olmalısınız: ‘‘y’nin x’e göre türevinin t’ye göre türevi’’ demek olur. $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)$ yazılımı da ‘‘y’nin x’e göre türevinin x’e göre türevi’’ anlamına gelir ki, buna biz ‘‘y’nin x’e göre ikinci türevi’’ der ve y'' veya $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ ile gösteririz.

Örneğin, $y = x^3 + 4x^2 - 5x + 7$ ise $y' = 3x^2 + 8x - 5$ ve $y'' = (y')' = 6x + 8$ olur.

Hatta $y''' = (y'')' = 6$ olduğunu da söyleyebiliriz. Daha da ileri giderek $y'''' = 0$ olduğunu da. Anlayacağınız üs olarak koyduğumuz türev işareti bize ifadenin kaçıncı türevini almamız gerektiğini söyler. Tabi, büyük n sayıları için bir ifadenin n’ninci türevini yazarken karışıklık yaşanabileceği için bunu $y^{(n)}$ olarak gösteririz. Buna **ardışık türevler** dendiği de olur.

Yüksek mertebeden türev yazılımlarını aşağıdaki tabloda gösterdik:

Fonksiyon	Türevleri
y	$y', y'', y''', \dots, y^{(n)}$
y	$\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{d^2y}{dx^2}, \dfrac{d^3y}{dx^3}, \dots, \dfrac{d^ny}{dx^n}$
$f(x)$	$f'(x), f''(x), f'''(x), \dots, f^{(n)}(x)$
y	$Dy, D^2y, D^3y, \dots, D^ny$

Uyarı. $f^{\,2}(x)$ yazılımı $f(x)$’*in karesi* demektir. $f(x)$’*in ikinci türevi,* $f^{(2)}(x)$ yazılarak gösterilir. Benzer durum y^3 ve $y^{(3)}$ yazılımlarında da var!

Aşağıdaki tabloyu doldurunuz.

$y = f(x)$	y'	y''
$x^3 + 6x$		
$x^2 - 2x + 10$		
$\sqrt{x}$		
$\dfrac{3}{x}$		

Gıcıklık parayla değil ya, bazen y’nin x’e göre değil, x’in y’ye göre hem de ilk değil, ikinci veya üçüncü türevini sorarlar. Aklınızda olmasa da notlarınızda bulunsun:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\dfrac{dy}{dx}},$$

$$\frac{d^2x}{dy^2} = -\frac{d^2y}{dx^2}\cdot\left(\frac{dy}{dx}\right)^{-3},$$

$$\frac{d^3x}{dy^3} = \left[3\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 - \frac{d^3y}{dx^3}\cdot\frac{dy}{dx}\right]\cdot\left(\frac{dy}{dx}\right)^{-5}$$

Ayrıca, bileşke fonksiyonlar için de ikinci ve üçüncü türev kurallarını kaydedelim. İlk türevini öğrenmiştik zaten.

$u = g(x)$ olmak üzere;
$[f(u)]' = u'\cdot f'(u)$
$[f(u)]'' = (u')^2\cdot f''(u) + u''\cdot f'(u)$
$[f(u)]''' = 3\cdot u'\cdot u''\cdot f''(u) + (u')^3\cdot f'''(u) + u'''\cdot f'(u)$

Bu eşitliklerin hepsini çarpımın türevi kuralından kanıtlayabilirsiniz, dolayısıyla bunları da ezberlemenize gerek yoktur.

Açık ve Kapalı fonksiyonlar. Bir f fonksiyonunda x’in görüntüsü y olsun. Fonksiyon kuralı doğrudan doğruya $y = f(x)$ biçiminde verilmişse, bu tür fonksiyonlara **açık fonksiyon** denir.

Örneğin, $y = x + 5$, $y = \sin x + 9$, $y = |x|$ gibi fonksiyonlar açıktır. Anlayacağınız, y değeri x cinsinden verilmiş olacak.

Fonksiyon kuralı, dolaylı olarak yani x ile y arasında $f(x, y) = 0$ biçiminde veya buna dönüştürülebilen bir bağıntı ile verilmişse, bu tür fonksiyonlara **kapalı fonksiyon** denir.

Örneğin, $x^3 + y^5 = 0$, $x^2 - y^7 = 5xy$, $x^3 \cdot \sin(y) = \cos(y)$ gibi fonksiyonlar kapalıdır.

Bazı kapalı fonksiyonlar açık halde yazılabilir fakat bazıları yazılamaz. Demek istediğimiz şudur: $x^2y^3 - 3xy + 2y^2 = 0$ şeklindeki bir denklemde ne y'yi x cinsinden, ne de x'i y cinsinden yazmak mümkündür.

Şu ana kadar açık fonksiyonların ve kapalı olsa da açık hale gelebilenlerin türevlerini almayı öğrendik, şimdi de açık halde yazılamayan kapalı fonksiyonların türevlerini almayı öğreneceğiz.

Kapalı fonksiyonların türevleri. $y = x^3 + 3x^2 - 7$ gibi açık bir fonksiyonun x'e göre türevi alınırken yapılan iş, her iki tarafın da x'e göre türevini almaktır, böylelikle $y' = 3x^2 + 6x$ bulunur. Bu fonksiyon bize açık değil de $x^3 + 3x^2 - 7 - y = 0$ şeklinde verilseydi de her iki yanın x'e göre türevini türevini alsaydık olurdu. Şöyle ki: $3x^2 + 6x - 0 - y' = 0$ olurdu ki $y' = 3x^2 + 6x$ çıkardı. Yani denklem kapalı da olsa açık da olsa, eşitliğin her iki yanının x'e göre türevi alınır ve çıkan denklemden y' çözülür.

Bir de pratik kural. Verilen ifadede tüm verilenler bir tarafa toplandıktan, yani $f(x, y) = 0$ haline getirildikten sonra, önce bu ifadenin y sabit gibi düşünülerek x'e göre türevi alınır, sonra x sabit düşünülerek y'ye göre türevi alınır. Bu iki ifade birbirine bu sırayla bölünerek işareti değiştirilir. Kısacası,

$$y' = -\frac{f_x'(x,y)}{f_y'(x,y)}$$

formülüyle de bulunabilir.

Örnek. $2x^3 + y^5 = 3x$ *eşitliği ile belirli kapalı fonksiyonda y'nin x'e göre türevini bulunuz.*

Çözüm 1: Özellikle açık hale gelebilen bir fonksiyon verdik ki işlemlerimizin sağlamasını yapabilelim. Şimdi her iki tarafın x'e göre türevini alalım. Dikkat edin, burada y'ye bir sabit sayı gibi davranıp türevine 0 demeyeceğiz, y'ye bir fonksiyon gibi davranmalıyız, ki zaten öyle.

$$2x^3 + y^5 = 3x$$

$$6x^2 + 5y^4 \cdot y' = 3$$

olduğundan $y' = \dfrac{-6x^2 + 3}{5y^4}$ olmalıdır.

Çözüm 2: $2x^3 + y^5 = 3x$ eşitliğini $2x^3 + y^5 - 3x = 0$ haline getirelim. Önce y'yi sabit bir sayı gibi düşünüp, x'e göre türev alalım: $6x^2 - 3$. Şimdi de x'i sabit bir sayı gibi düşünüp, y'ye göre türev alalım: $5y^4$. Bunları bu sırayla birbirine bölüp, ters işaretlisini alırsak; $y' = \dfrac{-6x^2 + 3}{5y^4}$ buluruz.

Örnek. $x^3.y^5 + 8y^3 = 5x + y^2$ *ise y' nedir?*

Çözüm 1: Şimdi tamamen kapalı[6] olan bu fonksiyonda y'nin x'e göre türevini bulacağız. Her iki tarafın x'e göre türevini bir alalım bakalım.

$$3x^2 \cdot y^5 + 5y^4 \cdot y' \cdot x^3 + 24y^2 \cdot y' = 5 + 2y \cdot y'$$

eşitliğinden $y' = \dfrac{-3x^2y^5 + 5}{5x^3y^4 + 24y^2 - 2y}$ bulunur.

Çözüm 2: Formülü kullanacağız.

$$y' = -\frac{f_x'(x,y)}{f_y'(x,y)} = \frac{-3x^2y^5 + 5}{5x^3y^4 + 24y^2 - 2y}.$$

Örnek. $\sqrt{y} + 2x^3 = \dfrac{17}{y}$ *eğrisine üzerindeki* (2, 1) *noktasından çizilen teğetin eğimini bulunuz.*

Çözüm: Teğet eğiminin y'nin x'e göre türevi olduğunu artık adınız gibi biliyorsunuz. Her iki tarafın x'e göre türevi alınırsa,

$$\frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot y' + 6x^2 = \frac{-17}{y^2} \cdot y'$$

bulunur ki $x = 2$ ve $y = 1$ değerleri yerlerine yazılırsa $y' = -\dfrac{48}{35}$ bulunur.

Örnek. $x^2 + y^2 = 25$ *denklemi ile belirli eğriye, üzerindeki* (–3, 4) *noktasından çizilen teğet ve normal denklemlerini bulunuz.*

Çözüm: Teğetin eğimini bulmak için x'e göre türev alalım: $2x + 2y \cdot y' = 0$ olduğundan $y' = -x/y$ çıkar. Noktamız (–3, 4) olduğundan $m_T = \dfrac{3}{4}$ olarak bulunur. Teğet denklemi ise $y - 4 = \dfrac{3}{4} \cdot (x + 3)$ düzenlenirse $4y - 3x = 25$ olarak bulunur. Normal denklemini yazmak için de önce normalin eğimini bulalım. $m_N = -\dfrac{4}{3}$ olduğundan normal denklemi de $y - 4 = -\dfrac{4}{3} \cdot (x + 3)$ düzenlenirse $y = -4x/3$ olarak bulunur.

[6] Açık halde yazılamayan kapalı fonksiyon manasında…

Örnek. $(y')^3 \cdot x^5 + \sqrt{y''} = \dfrac{x^2}{y^5}$ *eşitliğinin her iki yanının da türevini alınız.*

Çözüm: $3\cdot(y')^2\cdot y''\cdot x^5 + 5x^4\cdot(y')^3 + \dfrac{1}{2\sqrt{y''}}\cdot y''' = \dfrac{2x\cdot y^5 - 5y^4\cdot y'\cdot x^2}{y^{10}}$

Aşağıdaki tabloyu doldurunuz.

$f(x, y) = 0$	y_x'
$x^4 + y^3 = 2x$	
$x^4 + y^3 = 2xy$	
$x^2y + 2y^2 = x + 8$	
$\sqrt{x} + \sqrt[3]{y} = 1$	

Daha önce $y = x^n$ fonksiyonunun n doğal sayıları için türevinin $y' = n\cdot x^{n-1}$ olduğunu kanıtlamış ve ilerde n rasyonel olduğunda da doğru olduğunu iddia etmiştik. Şimdi bunu kanıtlama vakti geldi. n'nin $\dfrac{p}{q}$ gibi bir rasyonel sayı olduğunu düşünüyoruz.

Teorem. $y = x^{\frac{p}{q}}$ *ise* $y' = \dfrac{p}{q}\cdot x^{\frac{p}{q}-1}$.

Kanıt: $y = x^{\frac{p}{q}}$ ise $y^q = x^p$ olur. Eşitliğin her iki yanının x'e göre türevi alınırsa,

$y'\cdot q\cdot y^{q-1} = p\cdot x^{p-1}$

$$y' = \frac{p}{q}\cdot\frac{x^{p-1}}{y^{q-1}} = \frac{p}{q}\cdot x^{p-1}\cdot y^{1-q} = \frac{p}{q}\cdot x^{p-1}\cdot\left(x^{\frac{p}{q}}\right)^{1-q}$$

$$= \frac{p}{q}\cdot x^{p-1+\frac{p}{q}-p}$$

$$= \frac{p}{q}\cdot x^{\frac{p}{q}-1}$$

Eğrilerin parametrik denklemleri. Bir eğrinin üzerindeki her (x, y) noktasının apsisiyle ordinatı yani x'iyle y'si arasındaki ilişkiye, **eğrinin denklemi** dendiğini biliyoruz. Örneğin, $y + x = 1$, $y = 2x^2 - 5$, $x^2 + y^2 = 25$, … hep birer eğri denklemidir.

Bazen x ile y arasında doğrudan bir ilişki verilmez, bunun yerine bu değerlerin her ikisi de adına parametre dediğimiz bir üçüncü değişken cinsinden, yani dolaylı olarak verilir. İşte böyle bir parametreye bağlı olarak verilen x ve y değerleriyle kurulan denkleme eğrinin parametrik denklemi deriz. Şöyle bir şeydir yani: ‘‘A insanı B insanından 2 *cm* uzundur’’ deneceğine şöyle denmiş: ‘‘A insanı C'den 5 *cm* uzun ama B insanı C'den 3 *cm* uzun’’. A'nın B'den 2 *cm* uzun olduğunu bizim bulmamız istenir. Bunu da sanırım hepiniz bulabilirsiniz.

Bir de matematiksel örnek verelim:

$x = 2t + 1$ ve $y = 3t - 2$ eşitliklerinden t'ler çekilir ve eşitlenirse $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{3}$ elde edilir ki, parametreden kurtulmuş oluruz.

Başka bir örnek daha verelim:

$x = 2 + \cos\theta$ ve $y = 3 - \sin\theta$ ise x ile y arasındaki bağıntıyı bulmaya çalışalım. $\cos\theta$ ile $\sin\theta$ arasında aklımıza gelen ilk ilişki, kareleri toplamının 1 olduğudur, her iki eşitlikten bu değerleri çeker de yerlerine yazarsak, $(x - 2)^2 + (3 - y)^2 = 1$ buluruz ki yine parametreden kurtulmuş oluruz.

Tabii ki parametreden kurtulmak her zaman bu kadar kolay olamayacağı için, parametrik denklemlerle işlem yapmayı da bilmeliyiz.

Parametrik fonksiyonların türevleri. $x = h(t)$ ve $y = g(t)$ şeklinde iki fonksiyon verildiği zaman[7] y'nin x'e göre türevi zincir kuralından yararlanılarak bulunur. Şöyle ki:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

Formülü akılda tutmak için ‘‘dt’’lerin sadeleştiğini düşünebilirsiniz.

Örnek. $x = t^3 - 5t^2 + 3$ *ve* $y = 5t^3 + 4t - 1$ *olduğuna göre* $t = 1$ *noktasında eğriye çizilen teğetin eğimi kaçtır?*

Çözüm: $t = 1$ için $x = -1$ ve $y = 8$ olduğundan, eğriye üzerindeki $(-1, 8)$ noktasından çizilen teğetin eğiminin sorulduğunu anlıyoruz. Tabi, bu işimize yaramıyor, sadece neler olup bittiğini anlayın diye bulduk. ☺

[7] Burada ‘‘t’’ parametredir.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{15t^2+4}{3t^2-10t}$$ olup, t = 1 için $\frac{dy}{dx}=-\frac{19}{7}$

olur.

Bir fonksiyonun tersinin türevi. Bir $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$, $y = f(x)$ fonksiyonunun bire-bir ve örten ise tersinin olduğunu ve

$$f(x) = y \leftrightarrow f^{-1}(y) = x$$

yazılabildiğini biliyoruz. Bir fonksiyon ile tersinin türevleri arasındaki ilişkiyi şöyle bulabiliriz: $f^{-1}(y) = x$ eşitliğinin her iki tarafının x'e göre türevini alırsak; $(f^{-1})'(y)\cdot y' = 1$ olur ki, bu da

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{y'}=\frac{1}{f'(x)}$$

demek olur.

Toparlarsak, $f(a) = b$ olan bire-bir ve örten f ve f^{-1} fonksiyonları için,

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} \text{ veya } (f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}.$$

Örnek. $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 5$ *fonksiyonu verildiğine göre* $(f^{-1})'(13)$ *kaçtır?*

Çözüm: $f(a) = b$ ise $f^{-1}(b) = a$ olduğunu biliyoruz. Diğer yandan $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$ formülünün kullanılması için b = 13 verilmiş olup, $(f^{-1})'(13)$ ün sorulduğunu anlıyoruz. O halde $f(a) = a^3 + 5 = 13$ olduğundan $a = 2$ olması gerekir ve bundan dolayı $(f^{-1})'(13) = \frac{1}{f'(2)}$'dir. $f'(x) = 3x^2$ diye $f'(2) = 12$, dolayısıyla $(f^{-1})'(13) = \frac{1}{12}$ olur.

Örnek. $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 5$ *fonksiyonu verildiğine göre* $(f^{-1})'(x)$ *kaçtır?*

Çözüm 1: $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$ olduğundan $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{3x^2}$'dir. Şimdi bunu y cinsinden yazmak gerekecek. $y = x^3 + 5$ olduğundan $x = (y - 5)^{1/3}$ olur. Yerine yazarsak,

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{3(y-5)^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3}\cdot(y-5)^{\frac{-2}{3}}$$

buluruz ki, buna pek gözümüz alışık olmadığından düzenlersek, $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{3}\cdot(x-5)^{\frac{-2}{3}}$ olduğu çıkar.

Ters fonksiyonların türevlerinin kuralı, bize, bir fonksiyonun tersinin türevini bulmak için önce fonksiyonun tersinin kuralını bulup, daha sonra türevinin almamıza hiç de gerek olmadığını söylüyor. Yapılması gereken iş, f^{-1} fonksiyonunun b için türevi sorulduğunda, f fonksiyonunda b'ye gidenin türevini bulup, çarpmaya göre tersini almak olmalıdır. Ama tabii ki beğenmeyen önce fonksiyonun tersini alır, sonra da türevini, keyfe kalmış bir şey. Örneğin, aşağıdaki örnekte öyle yaptım.

Örnek. $f:\mathbb{R}^+\mapsto(-4, \infty)$ *olmak üzere*

$$y = f(x) = x^2 - 4$$

fonksiyonu veriliyor. $(f^{-1})'(x)$ *ve* $(f^{-1})'(5)$ *değerlerini hesaplayınız.*

Çözüm: $f^{-1}(x) = \sqrt{x+4}$ olduğundan $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+4}}$ olur. O halde $(f^{-1})'(5) = \frac{1}{2\sqrt{5+4}} = \frac{1}{6}$.

CEBİRSEL OLMAYAN FONKSİYON TÜREVLERİ

Fonksiyonlar çoğu kez cebirsel ve cebirsel olmayan fonksiyonlar diye sınıflandırılır. Bu bölümde cebirsel olmayan; trigonometrik, logaritmik ve üstel fonksiyonların türevlerini göreceğiz. Bundan önceki bölümde türevle ilgili görülen tüm tanım ve teoremler elbet bu bölüm için de geçerli olacaktır.

Trigonometrik fonksiyon türevleri. Altı farklı trigonometrik oran olduğunu biliyoruz. Şimdi sırasıyla bunların türevlerini almayı öğreneceğiz.
sin ve cos fonksiyonlarının türevini tanım yardımıyla yaptıktan sonra tan, cot, sec, csc fonksiyonlarının kanıtlarını türev teoremleriyle yapacağız:

Teorem. $y = f(x) = \sin x$ *ise* $y' = \cos x$.

Çözüm:
$$f'(x) = \lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$= \lim_{h\to0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$$
$$= \lim_{h\to0}\frac{2.\sin\frac{h}{2}\cdot\cos(x+\frac{h}{2})}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} 2\cdot\frac{\sin\frac{h}{2}}{h}\cdot\cos(x+\frac{h}{2})$$
$$= 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\cos x$$
$$= \cos x$$

Teorem. *$y = f(x) = \cos x$ ise $y' = -\sin x$.*

Çözüm: $f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{-2\cdot\sin\frac{h}{2}\cdot\sin(x+\frac{h}{2})}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\left[-2\cdot\frac{\sin\frac{h}{2}}{h}\cdot\sin(x+\frac{h}{2})\right]$$
$$= -2\cdot\frac{1}{2}\cdot\sin x$$
$$= -\sin x$$

Teorem. *$y = f(x) = \tan x$ ise $y' = \sec^2 x$.*

Kanıt: $y' = (\tan x)' = (\frac{\sin x}{\cos x})'$ olduğundan bölümün türevi kuralından yardım istenirse,

$$y' = \frac{\cos x\cdot\cos x-\sin x\cdot(-\sin x)}{\cos^2 x}$$
$$= \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x.$$

Teorem. *$y = f(x) = \cot x$ ise $y' = -\csc^2 x$.*

Kanıt: $y' = (\cot x)' = (\frac{\cos x}{\sin x})'$ olduğundan yine bölümün türevi kuralından yardım istenirse,

$$y' = \frac{\sin x\cdot(-\sin x)-\cos x\cdot\cos x}{\sin^2 x}$$
$$= \frac{-1}{\sin^2 x}$$
$$= -\csc^2 x.$$

Teorem. *$y = f(x) = \sec x$ ise $y' = \sec x\cdot\tan x$.*

Kanıt: $y' = (\sec x)' = (\frac{1}{\cos x})'$

$$= (\cos^{-1} x)'$$
$$= (-1).\cos^{-2} x.(-\sin x)$$
$$= \frac{\sin x}{\cos x\cdot\cos x}$$
$$= \sec x\cdot\tan x$$

Teorem. *$y = f(x) = \csc x$ ise $y' = -\csc x\cdot\cot x$.*

Kanıt: $y' = (\csc x)' = (\frac{1}{\sin x})'$

$$= (\sin^{-1} x)'$$
$$= (-1)\cdot\sin^{-2} x\cdot(\cos x)$$
$$= \frac{-\cos x}{\sin x\cdot\sin x}$$
$$= -\csc x\cdot\cot x$$

Zincir kuralına göre $\sin(g(x))$'in türevi de

$$y = \sin(g(x)) \Rightarrow y' = \cos(g(x))\cdot g'(x)$$

olur.

Benzer şekilde tanımdan veya türev kurallarından diğer trigonometrik oranların türev kurallarını da çıkarabilirsiniz.

Bilmeniz gerekenleri aşağıda listeledik:

$u = g(x)$ olmak üzere;

1. $y = \sin x \Rightarrow y' = \cos x$
$y = \sin u \Rightarrow y' = u'\cdot\cos u$

2. $y = \cos x \Rightarrow y' = -\sin x$
$y = \cos u \Rightarrow y' = -u'\cdot\sin u$

3. $y = \tan x \Rightarrow y' = \sec^2 x$
$y = \tan u \Rightarrow y' = u'\cdot\sec^2 u$

4. $y = \cot x \Rightarrow y' = -\csc^2 x$
$y = \cot u \Rightarrow y' = -u'\cdot\csc^2 u$

5. $y = \sec x \Rightarrow y' = \sec x\cdot\tan x$
$y = \sec u \Rightarrow y' = u'\cdot\sec u\cdot\tan u$

6. $y = \csc x \Rightarrow y' = -\csc x\cdot\cot x$
$y = \csc u \Rightarrow y' = -u'\cdot\csc u\cdot\cot u$

Hatırlatma. Yukardaki türev formüllerinde dikkat edilirse yazılımları c harfiyle başlayanların (cos, cot, csc) türevleri ‘’–‘’ ile başlamaktadır.

Örnek. $y = \sin x^3$ *ile belirli fonksiyon için y' değerini hesaplayınız.*

Çözüm: Soru sin u yapısında olduğundan,

$$y' = 3x^2\cdot\cos x^3$$

Örnek. $y = \cos\sqrt{x}$ *ile belirli fonksiyon için y' değerini hesaplayınız.*

Çözüm: Soru cos u yapısında olduğundan,

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot (-\sin x^3)$$

Örnek. $y = \sin(\cos x)$ *ile belirli fonksiyon için* y' *değerini hesaplayınız.*

Çözüm: Soru $\sin u$ yapısında olduğundan,

$$y' = (-\sin x)\cdot\cos(\cos x)$$

Örnek. $y = \sin^3 x$ *ile belirli fonksiyon için* y' *değerini hesaplayınız.*

Çözüm: Soru u^3 yapısında olduğundan,

$$y' = 3\cdot\sin^2 x\cdot\cos x$$

Örnek. $y = \sqrt{\cos x}$ *ile belirli fonksiyon için* y' *değerini hesaplayınız.*

Çözüm: Soru $\sqrt{u}$ yapısında olduğundan,

$$y' = (-\sin x)\cdot\frac{1}{2\sqrt{\cos x}}$$

Örnek. $y = \dfrac{1}{\sqrt[7]{\tan^3 x}}$ *ile belirli fonksiyon için* y' *değerini hesaplayınız.*

Çözüm: Soru $u^{\frac{-3}{7}}$ yapısında olduğundan,

$$y' = \frac{-3}{7}\cdot(\tan x)^{\frac{-10}{7}}\cdot\sec^2 x$$

Aşağıdaki tabloyu doldurunuz.

$f(x)$	$f'(x)$
$x + \sin x$	
$2\cdot\sin(3x + 5)$	
$\cos^2 x$	
$\cos(x^2 + x + 2)$	
$\pi + \pi.\tan x$	
$\tan(x^2)$	
$3\cdot\cot x - 1$	
$\cot\sqrt{x}$	
$\sin x - \sec x$	
$\sec(1/x)$	
$2\cdot\cos x + 3\cdot\csc x$	
$\csc^3 x$	

Ters trigonometrik fonksiyonların türevleri. Trigonometrik fonksiyonların bire-bir ve örten oldukları aralıklarda terslerinin olduğunu biliyoruz.

Sözgelimi, $\sin: [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \mapsto [-1, 1]$ fonksiyonunun tersi $\arcsin: [-1, 1] \mapsto [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ve

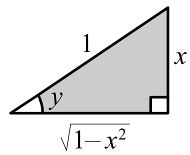
$$\sin 30^o = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \arcsin\frac{1}{2} = 30^o.$$

Teorem. $y = \arcsin x$ *ise* $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Kanıt: $y = \arcsin x$ ise $\sin y = x$ olur. Her iki tarafın x'e göre türevini alırsak,

$y'\cdot\cos y = 1$ olur ki $y' = \dfrac{1}{\cos y}$ bulunur.

$\sin y = x$ ise sağdaki şekilden $\cos y = \sqrt{1-x^2}$ olduğu görülür. O halde $y' = \dfrac{1}{\cos y} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ olduğu kanıtlanmış olur.



Zincir kuralına göre $u = g(x)$ için $y = \arcsin u$ ise $y' = u'\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}$ olduğunu da not edin.

Şimdi de diğer ters trigonometrik fonksiyonların türevlerinin kurallarını verelim, onları da not edin.

$u = g(x)$ olmak üzere;

7. $y = \arcsin x \Rightarrow y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$y = \arcsin u \Rightarrow y' = u'\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}$

8. $y = \arccos x \Rightarrow y' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

$y = \arccos u \Rightarrow y' = u'\cdot\dfrac{-1}{\sqrt{1-u^2}}$

9. $y = \arctan x \Rightarrow y' = \dfrac{1}{1+x^2}$

$y = \arctan u \Rightarrow y' = u'.\dfrac{1}{1+u^2}$

10. $y = \text{arccot}\, x \Rightarrow y' = \dfrac{-1}{1+x^2}$

$y = \text{arccot}\, u \Rightarrow y' = u'\cdot\dfrac{-1}{1+x^2}$

Hatırlatma. Yukardaki türev formüllerinde dikkat edilirse yine yazılımları c harfiyle başlayanların fonksiyonların terslerinin (arccos, arccot) türevleri ‘‘–‘‘ ile başlamaktadır.

Örnek. $y = \arcsin(x^2 + \sqrt{x} + 7)$ *fonksiyonunun x'e göre türevini bulunuz.*
Çözüm: Soru arcsin u formatında olduğundan,

$$y' = (2x + \frac{1}{2\sqrt{x}})\cdot\frac{1}{\sqrt{1-(x^2+\sqrt{x}+7)^2}}.$$

Örnek. $y = \arccos(\cos x)$ *fonksiyonunun x'e göre türevini bulunuz.*
Çözüm: Soru arccos u formatında olduğundan,

$$y' = (-\sin x)\cdot\frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2 x}} = (-\sin x)\cdot\frac{-1}{\sin x} = 1.$$

Örnek. $y = \sqrt{\arctan x}$ *fonksiyonunun x'e göre türevini bulunuz.*
Çözüm: Soru $\sqrt{u}$ formatında olduğundan,

$$y' = \frac{1}{1+x^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\arctan x}}$$

Örnek. $y = \sin(x^2 + \text{arccot } x)$ *fonksiyonunun x'e göre türevini bulunuz.*
Çözüm: Soru sin u formatında olduğundan,

$$y' = (2x - \frac{1}{1+x^2})\cdot\cos(x^2 + \text{arccot } x)$$

Aşağıdaki tabloyu doldurunuz.

$f(x)$	$f'(x)$
$x\cdot\arcsin x$	
$\arcsin(3x+5)$	
$\arccos^2 x$	
$\arccos(x^2+x+2)$	
$\pi + \pi\cdot\arctan x$	
$\arctan(x^2)$	
$3\cdot\text{arccot } x - 1$	
$\text{arccot}\sqrt{x}$	

Logaritmik fonksiyonların türevleri. $y = \ln x$ fonksiyonunun türevinin kuralı $\frac{1}{x}$'dir.
Kanıt: Yine türev tanımını kullanacağız.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\ln(x+h)-\ln x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\log_e(x+h)-\log_e x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\log_e\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\log_e\left(1+\frac{h}{x}\right)}{h}$$

Şimdi buradaki h/x ifadesine k diyelim. $h \to 0$ olduğundan $k \to 0$ olur. Bir de $t = 1/k$ için $k \to 0$ dite $t \to \infty$ olur.

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{x}{h}\cdot\log_e\left(1+\frac{h}{x}\right)}{\frac{x}{h}\cdot h} = \lim_{h\to 0}\frac{\log_e\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}}{x}$$

$$= \lim_{k\to 0}\frac{\log_e(1+k)^{\frac{1}{k}}}{x} = \lim_{t\to\infty}\frac{\log_e\left(1+\frac{1}{t}\right)^t}{x}$$

$$= \lim_{t\to 0}\left[\frac{1}{x}\cdot\log_e\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right] = \frac{1}{x}\cdot\log_e e = \frac{1}{x}$$

Başka tabandaki logaritmik fonksiyonların türevlerini de şöyle alacağız:
$\ln x = \log_e x$ olduğunu biliyoruz. Taban buradaki gibi e değil de uygun bir a reel sayısı ise

$$y = \log_a x = \frac{\log_e x}{\log_e a} = \frac{\ln x}{\ln a} = \frac{1}{\ln a}.\ln x$$

olur ki burada $\frac{1}{\ln a}$ sabit bir sayı olduğundan,

$$y = \log_a x = \frac{1}{\ln a}\cdot\ln x \Rightarrow y' = \frac{1}{\ln a}\cdot\frac{1}{x}$$

olur. Sonuç olarak logaritmik fonksiyonları türev kuralları için aşağıdaki listeyi oluşturabiliriz:

$u = g(x)$ olmak üzere;

11. $y = \ln x \Rightarrow y' = \frac{1}{x}$

$y = \ln u \Rightarrow y' = u'\cdot\frac{1}{u}$

12. $y = \log_a x \Rightarrow y' = \frac{1}{\ln a}\cdot\frac{1}{x}$

$y = \log_a u \Rightarrow y' = u'\cdot\frac{1}{\ln a}\cdot\frac{1}{u}$

Tabii ki, üstteki eşitliklerin hepsi uygun koşullar altında, demek istediğim aslında $y = \ln|x| \Rightarrow y' = \frac{1}{x}$ olmalıydı, siz onu öyle görün.☺

Örnek. $y = \ln 5$ *fonksiyonunun türevini bulunuz.*

Çözüm: Soru ln x kalıbında zannedip de cevaba $\frac{1}{5}$ demeyin sakın. ln 5 bir reel sayı olduğundan fonksiyon bir sabit fonksiyondur, onun için türevi sıfırdır.

Örnek. $y = \ln(x^3 + 8x - 1)$ *ile tanımlı fonksiyonda* y*'nin* x*'e göre türevini bulunuz.*
Çözüm: Soru ln u kalıbında olduğundan,

$$y' = (2x + 8)\cdot\frac{1}{x^3+8x-1}$$

Örnek. $y = \log_5(2x^3 + 8\cdot\tan x - 1)$ *ile tanımlı fonksiyonda* y*'nin* x*'e göre türevini bulunuz.*
Çözüm: Soru $\log_a u$ kalıbında olduğundan,

$$y' = (6x^2 + 8\cdot\sec^2 x)\cdot\frac{1}{\ln 5}\cdot\frac{1}{2x^3+8\cdot\tan x-1}$$

Örnek. $y = \sin(\ln x)$ *ile tanımlı fonksiyonda* y*'nin* x*'e göre türevini bulunuz.*
Çözüm: Soru sin u kalıbında olduğundan,

$$y' = \frac{1}{x}\cdot\cos(\ln x)$$

Örnek. $y = \ln(3x^2 + 5x + a)$ *ile belirli eğrinin* $x = 1$ *apsisli noktasındaki normali x ekseni ile* 135°*'lik açı yaptığına göre a kaçtır?*
Çözüm: Normal ile teğet birbirlerine dik olduğundan, normal x ekseniyle 135°'lik açı yapıyorsa teğet x ekseni 45°'lik açı yapar. O halde teğetin eğimi tan 45° = 1 olmalıdır. Anlayacağınız $f'(1) = 1$'miş. $f'(x) = y' = (6x + 5)\cdot\frac{1}{3x^2+5x+a}$ olduğundan $f'(1) = 11\cdot\frac{1}{8+a} = 1$ olmalıdır, o halde $a = 3$.

Aşağıdaki tabloyu doldurunuz.

$f(x)$	$f'(x)$
$x\cdot\ln x$	
$\ln(3x + 5)$	
$\ln x\cdot\log_3 x$	
$\log_3(x^2 + 2x + 11)$	
$\ln(\sin x)$	
$\ln(\ln x)$	
$\sqrt{\log_2(\arctan x)}$	

Üstel fonksiyonların türevleri. $y = f(x) = x^3$ fonksiyonunun türevi $y' = f'(x) = 3x^2$'dir, ancak $y = f(x) = 3^x$ için $y' = f'(x) = x\cdot 3^{x-1}$ değildir. Değişkenin üs olarak bulunduğu ($y = 3^x$, $y = 5^{x+7}$, $y = x^x$, … gibi) fonksiyonlara genel anlamda **üslü** (veya **üstel**) fonksiyonlar dendiğini biliyoruz.

x'e bağlı üstel fonksiyonların türevlerini alırken genel olarak önce eşitliğin her iki yanının e tabanına göre logaritması (ln'i) alınır, daha sonra eşitliğin her iki yanının x'e göre türevi bulunur.

$y = a^x$'in türevi. Şimdi $y = a^x$ gibi üstel fonksiyonların türevini almayı öğreneceğiz. Söylemeye gerek var mı bilmiyorum, burada tabii ki a sayısı 1'den farklı bir reel sayıdır.
$y = a^x$ eşitliğinin her iki tarafının ln'ini alırsak,

$$y = a^x \Rightarrow \ln y = \ln a^x = x\cdot\ln a$$

çıkar. Şimdi de her iki tarafın x'e göre türevini alalım:

$$\ln y = x\cdot\ln a \Rightarrow y'\cdot\frac{1}{y} = \ln a$$
$$\Rightarrow y' = y\cdot\ln a$$
$$\Rightarrow y' = a^x\cdot\ln a$$

$y = e^x$'in türevi. Üstte a gördüğümüz yere e yazacağız. $y = a^x \Rightarrow y' = a^x\cdot\ln a$ olduğunu kanıtlamıştık. O halde $y = e^x \Rightarrow y' = e^x\cdot\ln e = e^x$.
Şimdi öğrendiğimiz bu bilgileri de eski listemize ekleyelim:

$a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ ve $u = g(x)$ olmak üzere;

13. $y = a^x \Rightarrow y' = a^x\cdot\ln a$
$y = a^u \Rightarrow y' = u'\cdot a^u\cdot\ln a$

14. $y = e^x \Rightarrow y' = e^x$
$y = e^u \Rightarrow y' = u'\cdot e^u$

Örnek. $y = 5^{x^3+7x}$ *ile belirli fonksiyonun* x*'e göre türevini bulunuz.*
Çözüm: Soru 5^u kalıbında olduğundan,

$$y' = (3x^2 + 7)\cdot 5^{x^3+7x}\cdot\ln 5$$

Örnek. $y = 3^{\sin x}$ *ile belirli fonksiyonun* x*'e göre türevini bulunuz.*
Çözüm: Soru 3^u kalıbında olduğundan,

$$y' = \cos x\cdot 3^{\sin x}\cdot\ln 3$$

Örnek. $y = e^{x^3+5x}$ *ile belirli fonksiyonun* x*'e göre türevini bulunuz.*
Çözüm: Soru e^u kalıbında olduğundan,

$$y' = (3x^2 + 5)\cdot e^{x^3+5x}$$

Örnek. *$y = e^{-x}$ ile belirli fonksiyonun x'e göre türevini bulunuz.*
Çözüm: Soru e^u kalıbında olduğundan,

$$y' = (-1)\cdot e^{-x} = -e^{-x}$$

Örnek. *$y = e^{(e^x)}$ ile belirli fonksiyonun x'e göre türevini bulunuz.*
Çözüm: Soru e^u kalıbında olduğundan,

$$y' = e^x\cdot e^{(e^x)} = e^{(e^x+x)}$$

Örnek. *$e^y + e^x = 2e$ eğrisinin $(1, 1)$ noktasındaki teğetinin denklemini bulunuz.*
Çözüm: Eşitliğin her iki yanının x'e göre türevini alırsak;

$$e^y + e^x = 2e \Rightarrow y'\cdot e^y + e^x = 0 \Rightarrow y' = -\frac{e^x}{e^y}$$

Bunun için (1, 1) noktasındaki teğet eğimi için

$$m_T = -\frac{e^1}{e^1} = -1$$

olup, teğetin denklemi de

$$y - 1 = (-1)\cdot(x - 1) \text{ yani } x + y = 2$$

bulunur.

Örnek. *$y = a^x$ ise $y' = a^x\cdot\ln a$ olduğunu kanıtlayınız.*

Çözüm: $y' = (a^x)' = (e^{\ln a^x})'$ olur ki soru e^u formatına döner.

$$y' = (\ln a)\cdot e^{\ln a^x} = a^x\cdot\ln a$$

Aşağıdaki tabloyu doldurunuz.

$y = f(x)$	$y' = f'(x)$
$x^4\cdot 4^x$	
$4^{3x+5} + 3^{x-1}$	
$\dfrac{e^x}{x^2 - x}$	
$e^{\tan x}$	
$5\cdot\arctan 2^x$	
$\dfrac{e^{2x}-1}{e^x+2}$	
$x^3\cdot e^{-5x+9}$	
$x\cdot e^x$	
$\sin^2 e^{2x}$	

Logaritma yardımıyla türev alma. $u = h(x)$, $v = g(x)$ olmak üzere

$$y = u^v \text{ veya } y = f_1(x)\cdot f_2(x)\cdot f_3(x)\cdot\ldots\cdot f_n(x)$$

gibi ifadelerin x'e göre türevleri alınırken logaritmadan yararlanırız. Yapılacak iş, önce eşitliğin her iki yanının uygun logaritmasını alıp daha sonra türevi bulmaktır. Aşağıdaki örnekleri inceleyiniz.

Örnek. *$y = x^x$ ise y' değerini bulunuz.*
Çözüm: Eşitliğin her iki yanının e tabanına göre logaritmasını (yani ln'ini) alalım.

$$y = x^x \Rightarrow \ln y = \ln x^x = x\cdot\ln x$$

Şimdi her iki tarafın x'e göre türevini alalım[8].

$$y'\cdot\frac{1}{y} = 1\cdot\ln x + \frac{1}{x}\cdot x$$

$$y' = y\cdot(\ln x + 1)$$

$$y' = x^x\cdot(\ln x + 1)$$

Örnek. *$y = (\sin x)^{\tan x}$ ise y' değerini bulunuz.*
Çözüm: Aynı işlemleri tekrarlıyoruz.

$$y = (\sin x)^{\tan x} \Rightarrow \ln y = \tan x\cdot\ln(\sin x)$$

Şimdi her iki tarafın x'e göre türevini alalım:

$$y'\cdot\frac{1}{y} = \sec^2 x\cdot\ln(\sin x) + \frac{1}{\sin x}\cdot\cos x\cdot\tan x$$

$$y' = y\cdot\left(\sec^2 x\cdot\ln(\sin x) + \frac{1}{\sin x}\cdot\cos x\cdot\frac{\sin x}{\cos x}\right)$$

$$y' = (\sin x)^{\tan x}\cdot(\sec^2 x\cdot\ln(\sin x) + 1)$$

Örnek. *$y = x^5$ ile belirli y fonksiyonunun logaritmadan yararlanarak türevini bulunuz.*
Çözüm: $y = x^5 \Rightarrow \ln y = \ln x^5 \Rightarrow \ln y = 5\cdot\ln x$
Şimdi her iki tarafın x'e göre türevini alalım:

$$y'\cdot\frac{1}{y} = 5\cdot\frac{1}{x} \Rightarrow y' = \frac{5\cdot y}{x} = \frac{5\cdot x^5}{x} = 5\cdot x^4$$

Örnek. *$y = x\cdot(1 + x^4)^3\cdot(1 + x^2)^4$ ile belirli y fonksiyonunun logaritmadan yararlanarak türevini bulunuz.*
Çözüm: Yine her iki yanın ln'ini alalım:

[8] $\ln x + 1$ ile $\ln(x + 1)$ değerlerini karıştırmayın!

$\ln y = \ln [x\cdot(1 + x^4)^3\cdot(1 + x^2)^4]$
$= \ln x + \ln (1 + x^4)^3 + \ln (1 + x^2)^4$
$= \ln x + 3\cdot\ln (1 + x^4) + 4\cdot\ln (1 + x^2)$

Şimdi de her iki yanın x'e göre türevini alalım:

$$y'\cdot\frac{1}{y} = \frac{1}{x} + 3\cdot\frac{1}{1+x^4}\cdot 4x^3 + 4\cdot\frac{1}{1+x^2}\cdot 2x$$

eşitliği düzenlenir ve y yerine değeri yazılırsa;

$$y' = x\cdot(1 + x^4)^3\cdot(1 + x^2)^4\cdot(\frac{1}{x} + \frac{12\cdot x^3}{1+x^4} + \frac{8x}{1+x^2})$$

Örnek. *$x^y = y^x$ denklemi ile belirli kapalı fonksiyonun x'e göre türevini bulunuz.*

Çözüm: Her iki tarafın ln'ini alalım:

$x^y = y^x \Rightarrow \ln x^y = \ln y^x \Rightarrow y\cdot\ln x = x\cdot\ln y$

Şimdi de her iki yanın x'e göre türevini alalım:

$$y'\cdot\ln x + \frac{1}{x}\cdot y = \ln y + y'\cdot\frac{1}{y}\cdot x$$

eşitliğinden y' çekilirse;

$$y' = \frac{y\cdot(y - x\cdot\ln y)}{x\cdot(x - y\cdot\ln x)}$$

bulunur[9].

Aşağıdaki tabloyu logaritma yardımıyla türev alarak doldurunuz.

$f(x)$	$f'(x)$
x^{2x}	
$(\cos x)^{\cot x}$	
$(x-1)^x + x^3$	
$x^5.(1-2x^3)^6$	

Türevin limite uygulanışı (L'Hospital kuralı). $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ ifadesinde $\frac{0}{0}$ veya $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliği varsa, bu limit yerine $f(x)$ ile $g(x)$ türevlenebilir ve $g'(x) \neq 0$ olmak üzere, $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ alınabilir.

Bir başka ifadeyle,

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Bu kurala **L'Hospital Kuralı** denir.

Eğer $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ ifadesi hala $\frac{0}{0}$ veya $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliği şeklindeyse, L'Hospital Kuralı bir kez daha uygulanabilir, hatta bu işleme belirsizlik hali giderilinceye değin devam edilebilir.

Örnek. $\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x^5-32}$ *kaçtır?*

Çözüm: $\frac{0}{0}$ belirsizliğini fark etmişsinizdir.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x^5-32} = \lim_{x\to 2}\frac{(x^2+x-6)'}{(x^5-32)'} = \lim_{x\to 2}\frac{2x+1}{5x^4} = \frac{1}{16}.$$

Örnek. $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[4]{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$ *kaçtır?*

Çözüm: Yine $\frac{0}{0}$ belirsizliği var.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[4]{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt[4]{x}-1)'}{(\sqrt[3]{x}-1)'} = \lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{4}.x^{\frac{-3}{4}}}{\frac{1}{3}.x^{\frac{-2}{3}}} = \frac{3}{4}.$$

Örnek. $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x-1}{4x-\pi}$ *kaçtır?*

Çözüm: Yine $\frac{0}{0}$ belirsizliği var.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x-1}{4x-\pi} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{(\tan x-1)'}{(4x-\pi)'} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1+\tan^2 x}{4} = \frac{1}{2}.$$

Örnek. $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}$ *kaçtır?*

Çözüm: Bu sefer $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliği var.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{(x')} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1} = 0.$$

[9] Fonksiyon kapalı olduğundan bu sefer y'yi x cinsinden çekip yerine yazamadığımıza dikkat edin.

Örnek. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{e^x - 1}{x^2}$ *kaçtır*?

Çözüm: Yine $\dfrac{\infty}{\infty}$ belirsizliği var.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x-1}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(e^x-1)'}{(x^2)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2x}$$

olur, dikkat edilirse hala $\dfrac{\infty}{\infty}$ belirsizliği var,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(e^x)'}{(2x)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty.$$

Aşağıdaki eşitlikleri doğrulayınız.

Soru	***Yanıt***
$\lim_{x\to2} \dfrac{x^4-3x^2+4}{x^3+2x^2-4x-8}$	$\dfrac{5}{4}$
$\lim_{x\to3} \dfrac{x^2+2x-15}{x^2+5x-1}$	$\dfrac{8}{11}$
$\lim_{x\to1} \dfrac{\sqrt[3]{2x+6}-2}{x-1}$	$\dfrac{1}{6}$
$\lim_{x\to8} \dfrac{\sqrt[3]{x}-2}{\sqrt{2x}-4}$	$\dfrac{1}{3}$
$\lim_{x\to0} \dfrac{\sin 3x}{\sin 4x}$	$\dfrac{3}{4}$
$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sqrt{1+2\cos x}-1}{x-\frac{\pi}{2}}$	-1
$\lim_{x\to+\infty} \dfrac{4x+7\cdot\ln x}{x+3\cdot\ln x}$	4
$\lim_{x\to3} \dfrac{x-3}{e^x-e^3}$	$\dfrac{1}{e^3}$
$\lim_{x\to0} \dfrac{\sin x}{e^{5x}-e^{-5x}}$	$\dfrac{1}{10}$
$\lim_{x\to0} \dfrac{2x}{8^x-4^x}$	$\dfrac{2}{\ln 2}$

Çıkmış ÖYS soruları.

1.
$y = \dfrac{4x^2 - 6x + 2}{6x^2 - 9x + 5}$ fonksiyonun türevi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $y' = \dfrac{-72x^2 + 16x - 12}{(6x^2 - 9x + 5)^2}$

B) $y' = \dfrac{16x - 12}{(6x^2 - 9x + 5)^2}$

C) $y' = \dfrac{72x^2 + 16x - 18}{(6x^2 - 9x + 5)^2}$

D) $y' = \dfrac{-16x - 12}{(6x^2 - 9x + 5)^2}$

E) $y' = \dfrac{-72x^2 + 8x - 12}{(6x^2 - 9x + 5)^2}$

1968 ÜSS

2.
$y = \cot x$ fonksiyonunun türevi aşağıdaki ifadelerden hangisidir?

A) $y' = \operatorname{tg} x$ B) $y' = -\operatorname{tg} x$ C) $y' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

D) $y' = \dfrac{1}{\sin^2 x}$ E) $y' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

1969 ÜSS

3.
$f(x) = |3x - 2|$ fonksiyonunun $x_0 = \dfrac{2}{3}$ apsisli noktasında, türevinin değerini, varsa bulunuz?

A) 3 B) –3 C) 0 D) 1 E) Türevi yoktur

1971 ÜSS

4.
$f : x \mapsto f(x) = |\sin x|$ fonksiyonunun $x = 0$ için türevi aşağıdakilerden hangisidir?

A) 1 B) –1 C) 0 D) ±1
E) $x = 0$ için türev yoktur

1973 ÜSS

5.
$f(x) = \ln (x^2 - 2x + 7)$ fonksiyonunun türevi hangisidir?

A) $2x - 2$ B) $\dfrac{1}{2}(x^2 - 2x + 7)$ C) $\dfrac{2}{2x - 2}$

D) $\dfrac{2}{x^2 - 2x + 7}$ E) $\dfrac{2x - 2}{x^2 - 2x + 7}$

1974 ÜSS

6.
$f(x) = \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2}\cos x\right)$ ise $f'(\frac{\pi}{3})$'ün değeri ne olur?

A) $-\pi\sqrt{3}$ B) $-\pi\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ C) $\pi\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

D) $\pi\sqrt{3}$ E) $2\pi\sqrt{3}$

1974 ÜSS

7.
$\left.\begin{aligned} x &= t^3 + 3t \\ y &= t^3 - 3t \end{aligned}\right\}$ olursa, $t = 1$ için $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ nin değeri ne olur?

A) –1 B) 0 C) $\dfrac{1}{6}$ D) 1 E) 6

1975 ÜSS

8.
a, b, c reel sayıları arasında $a < b < c$ şeklinde olup, $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$; $f : x \mapsto [(x - a)(x - b)(x - c)]$ fonksiyonunun x değişkenine göre türevi $f'(x)$ dir. Aşağıdaki önermelerden hangisi yanlıştır?

A) $f'(a) > 0$ B) $f''(a) < 0$ C) $f'(c) > 0$
D) $f''(c) < 0$ E) $f'(b) < 0$

1976 ÜSS

9.
$f(x) = \cos x$ fonksiyonu $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ aralığı veriliyor.

$f'(u) = \dfrac{f(\frac{\pi}{2}) - f(0)}{\frac{\pi}{2}}$ şartını sağlayan u sayısı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\arccos\dfrac{\pi}{2}$ B) $-\arccos\dfrac{\pi}{2}$ C) $\arccos\dfrac{2}{\pi}$

D) $\arcsin\dfrac{2}{\pi}$ E) $-\arcsin\dfrac{2}{\pi}$

1977 ÜSS

10.
$f(x) = |x^3 - 8| - x^2$ olduğuna göre $f''(-1)$'in değeri nedir?

A) –8 B) –4 C) –2 D) 2 E) 4

1978 ÜSS

11.
$0 < a < b$ ve $\forall x \in [a, b]$ için $f'(x) > 0$ olduğuna göre $\forall x \in (a, b)$ için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

A) $f(x) = f(b)$ B) $f(x) > f(b)$ C) $f(x) < 0$
D) $f(x) > 0$ E) $f(x) > f(a)$

1986 ÖYS

12.
$f(x)$: $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $f(x) = |2 - x| + 2$ olduğuna göre, $f(1) + f'(3)$'ün değeri nedir?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

1988 ÖYS

13.
$y = f(x)$ fonksiyonu $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$ olarak tanımlı olduğuna göre $f'(2)$ değeri kaçtır?

A) $-\frac{3}{2}$ B) –1 C) $-\frac{2}{3}$ D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{3}{2}$

1989 ÖYS

14.
$e^{-x}\frac{d^2}{dx^2}(x^3e^x)$ in kısaltılmışı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $x^3 + 3x^2 + 3x$ B) $x^3 + 3x^2 + 6x$
C) $x^3 + 3x^2 + 9x$ D) $x^3 + 6x^2 + 6x$
E) $x^3 + 9x^2 + 3x$

1990 ÖYS

15.
$f(x) = (x-1)^2.(2x - t)$
$f''(0) = 0$
olduğuna göre, t kaçtır?

A) 4 B) 2 C) 0 D) –2 E) –4

1991 ÖYS

16.
$\frac{d}{dx}(\ell n(\cos x))$ aşağıdakilerden hangisidir?

A) $-\tan x$ B) $-\sec x$ C) $-\cot x$
D) $-\frac{1}{\sin x}$ E) $\frac{1}{\cos x}$

1992 ÖYS

17.
$\frac{d^2}{dx^2}(\sin^2 3x)$ aşağıdakilerden hangisidir?

A) $18.\sin 6x$ B) $18.\cos 6x$
C) $6.(\sin 3x + \cos 3x)$ D) $6.(\sin 3x - \cos 3x)$
E) $6.\cos^2 3x$

1992 ÖYS

18.
$f(3x - 5) = 2x^5 + x - 1$ ise $f'(1) + f(1)$ kaçtır?

A) 10 B) 12 C) 14 D) 16 E) 18

1993 ÖYS

19.
$f(x) = \ln(3x - 1)$ ise $f^{-1}(0) + (f^{-1})'(0)$ kaçtır?

A) –2 B) –1 C) 0 D) 1 E) 2

1994 ÖYS

20.
$f(x) = \ell n(3^{\cos 5x})$ olduğuna göre, $f'\left(\frac{3\pi}{10}\right)$ kaçtır?

A) $2\ell n3$ B) $5\ell n3$ C) $\ell n5$ D) $2\ell n5$ E) $\ell n15$

1995 ÖYS

21.
$x = 6.\sin 3t$
$y = 6.\cos^2 3t$
denklemi ile verilen $y = f(x)$ fonksiyonun $x = 3$ apsisli noktadaki türevinin değeri kaçtır?

A) -1 B) $-\frac{1}{2}$ C) 0 D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{3}{2}$

1995 ÖYS

22.

$f(x) = e^{\tan x}$ olduğuna göre,

$$\lim_{x \to \pi/4} \frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{x - \frac{\pi}{4}}$$

değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $-e^{-\frac{3}{2}}$ B) $\frac{1}{3}e^{-1}$ C) $-e^{-1}$ D) $2e$ E) $3e^2$

1996 ÖYS

23.

$0 < y < \frac{\pi}{2}$ olmak üzere, $y = \arcsin\frac{x}{x^2+1}$ fonksiyonun $x = 1$ noktasındaki türevinin değeri kaçtır? ($\arcsin\theta = \sin^{-1}\theta$)

A) –1 B) $-\frac{1}{2}$ C) 0 D) $\frac{1}{2}$ E) 1

1998 ÖYS

CEVAP ANAHTARI									
1	B	**2**	C	**3**	E	**4**	E	**5**	E
6	B	**7**	C	**8**	D	**9**	D	**10**	E
11	C	**12**	C	**13**	B	**14**	D	**15**	E
16	A	**17**	B	**18**	B	**19**	D	**20**	B
21	A	**22**	D	**23**	C	**24**		**25**	