Lineer Cebir
(Matris – Determinant)

Bu dokümanda kitap dili kullanılmamıştır.

Tanım

F bir cisim, i=1,2,...,m ve j=1,2,…,n için $a_{ij} \in F$ olmak üzere,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{bmatrix}$$

şeklindeki dikdörtgensel tabloya mxn tipinde bir matris denir ve bu kısaca $A=[a_{ij}]_{mxn}$ şeklinde gösterilir. i' ye satır indisi, j' ye sütun indisi, a_{ij}' ye de matrisin i. satır, j. sütundaki elemanı denir.

$$\begin{array}{c} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \longrightarrow \text{1. satır} \\ \longrightarrow \text{2. satır} \\ \\ \longrightarrow \text{m. satır} \end{array} \\ \begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \text{1. sütun} & \text{2. sütun} & \text{n. sütun} \end{array} \end{array}$$

Uyarı

A_{mxn} matrisinin eleman sayısı n.m tanedir. Bunu çarpım yoluyla sayma metoduyla kolaylıkla bulabilirsiniz.

Örnek

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 3 \end{bmatrix}$$

A matrisi, R cismi üstünde tanımlanmış 2x3 tipinde bir matristir. A_{2x3}

A matrisinin elemanları;

$a_{11}=1$, $a_{12}=-2$, $a_{13}=0$, $a_{21}=0$, $a_{22}=\sqrt{3}$, $a_{23}=3$

A matrisinin satır ve sütunları;

1. satırı [1,-2,0]
2. satırı [0, $\sqrt{3}$,3]

1.sütunu $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

2. sütunu $\begin{bmatrix} -2 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}$

3. sütunu $\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$

Örnek

$A=[a_{ij}]_{4x3}$ matrisi 4x3 tipinde verildiğinden, 4 tane satırı, 3 tane sütunu vardır. A matrisinin eleman sayısı 12 tanedir. a_{3x4} elemanı A matrisinin elemanı değildir. i=1,2,3,4 ve j=1,2,3 değerlerini alabilir.

İki matrisin eşitliği

$A=[a_{ij}]_{mxn}$ ve $B=[b_{ij}]_{mxn}$ iki matris olsun. Her i ve j için $a_{ij}=b_{ij}$ ise A ve B matrisleri eşittir denir. A=B şeklinde gösterilir.

İki matrisin eşit olabilmesi için aynı tipten olması gerekir. O halde genel olarak $A_{mxn} \neq A_{nxm}$ dir.

Örnek

$$\begin{bmatrix} x & y \\ x+y & x-y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$$

olduğuna göre a+b kaçtır?

Çözüm:

a=x, b=y olduğuna göre sorulan x+y dir. x+y=3 olduğu tabloda zaten verilmiştir.

Özel matrisler

Karesel matris

Bir matriste satır sayısı, sütun sayısına eşitse yani m=n ise bu matrise ***karesel matris (kare matris)*** denir.

$\begin{bmatrix} 4 \end{bmatrix}$ matrisi 1x1 tipinde karesel matristir. (Bu *her sayı matristir anlamına gelmez.*)

$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ matrisi 2x2 tipinde karesel matristir.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. köşegen veya kısaca köşegende i=j dir.

köşegen

Sıfır matris

Her (i,j) $\in$ mxn için $a_{ij}=0$ ise bu matrise ***sıfır matrisi*** denir ve O ile gösterilir.

(Yani, tüm elemanları sıfır olan matrise sıfır matrisi diyoruz. Sıfır matrisi karesel matris olmak zorunda değildir)

$$[0], \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \cdots$$

Not: A sıfır matris ise A=0 yazıldığı da olur.

Birim matris
Bir nxn karesel matriste $i \neq j$ için $a_{ij}=0$ ve i=j için $a_{ij}=1$ ise bu matrise birim matris denir ve I_n ile gösterilir.
(Birim matris karesel matris olmak zorundadır. Kare matrisin köşegen üzerindeki elemanlar 1 diğer elemanlar 0 olmalı, $I_{1x1}=I_1$)

$I_1=\begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$

$I_2=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$I_3=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Satır matris
A_{1xn} tipindeki matrislere ***satır matris*** denir.

$$\begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -2 & 5 \end{bmatrix}, \ldots$$

Sütun matris
A_{mx1} tipindeki matrislere ***sütun matris*** denir.

$$\begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ldots$$

Alt matris
Bir matrisin bazı satır ve sütunları silindiğinde kalan matrise o matrisin ***alt matris***i denir.

2x3 tipinde verilen $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ matrisin alt matrislerini yazalım,
1. satır silinirse;
$\begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ 1x3 tipinde
2. satır silinirse;
$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ 1x3 tipinde
1. sütun silinirse;
$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ 2x2
2. sütun silinirse;
$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$ 2x2
3. sutun silinirse;
$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ 2x2
1. ve 2. sütun silinirse;
$\begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$ 2x1
1 ve 3. sütun silinirse;
$\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ 2x1
2 ve 3. sütun silinirse;
$\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ 2x1

Boş matris veya elemanı olmayan matris diye bir tanımlama yapılmadığını unutmayalım.

Tanım verilmemiş ama her matris kendisinin alt matrisi oluyorsa (şuan bilmiyorum, hatalıysa düzeltiniz) 2x3 tipindeki matrisin 21 tane alt matrisi vardır bunlardan 9 tanesi verilmiştir.

Güzel bir araştırma sorusu unutmadan yazalım; ***mxn tipindeki matrisin kaç tane alt matrisi vardır****? Okuldaysak öğrencilere bunu araştırma ödevi olarak verebilir ve sözlü notu ile değerlendirebiliriz*

Matrislerde toplama
Tanım
$A=[a_{ij}]_{mxn}$ ve $B=[b_{ij}]_{mxn}$ aynı tipten iki matris olsun.
A ile B nin toplamı
$A+B=[a_{ij}]_{mxn}+[b_{ij}]_{mxn}=[a_{ij}+b_{ij}]_{mxn}$
olarak tanımlanır.
Yani aynı indisli elemanlar toplanıp aynı yere yazılır.

Örnek

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Örnek

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$2.\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.1 & 2.2 & 2.3 \\ 2.4 & 2.5 & 2.6 \end{bmatrix}$$

Matrisin bir skaler ile çarpımı

Cisim elemanlarına skaler denir. 2 bir skalardır. 3+5i başka bir skalardır.

Tanım

F bir cisim, $A=[a_{ij}]_{mxn}$ elemanları F den alınan bir matris ve $k\in F$ ise k skaleri ile A matrisinin çarpımı

$k.A=k.[a_{ij}]_{mxn}=[k.a_{ij}]_{mxn}$

olarak tanımlanır.

Kısaca şöyle diyelim, bir matrisi bir sayı ile çarpmak demek, matrisin tüm elemanlarını çarpmak demektir.

Örnek

$A=\begin{bmatrix}1&1&1\\2&2&2\end{bmatrix}$ matrisi için

a) -3.A=?

b) (1+2i)A=?

$-3A=\begin{bmatrix}-3&-3&-3\\-6&-6&-6\end{bmatrix}$

$(1+2i)A=\begin{bmatrix}1+2i&1+2i&1+2i\\2+4i&2+4i&2+4i\end{bmatrix}$

Örnek

$x.\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}2\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8\\3\end{bmatrix}$

olduğuna göre x-y=?

Çözüm

$\begin{bmatrix}x\\3x\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}6\\3y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8\\3\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}x+6\\3x+3y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8\\3\end{bmatrix}$

$x+6=8 \Rightarrow x=2$

$3x+3y=3 \Rightarrow y=-1$

x-y=3

Toplama işleminin özellikleri

$A=[a_{ij}]_{mxn}$, $B=[b_{ij}]_{mxn}$, $C=[c_{ij}]_{mxn}$ aynı tip matrisler, k_1, k_2, k_3 skaler olmak üzere;

a) A+B=B+A

b) (A+B)+C=A+(B+C)

c) A+O=O+A=A, O sıfır matris

d) A+(-A)=(-A)+A=O

Toplama işleminin birim elemanı O, A nın toplama işlemine göre tersi –A dır. O halde aynı tipteki matrislerin kümesi toplama işlemine göre bir değişmeli gruptur.

e) k.(A+B)=k.A+k.B

f) $(k_1+k_2).A=k_1A+k_2A$

g) $(k_1.k_2).A=k_1.(k_2.A)$

h) e.A=A , e, F nin çarpmaya göre birim elemanı

i) A+B=C ise A=C-B

Örnek

$A-2B=\begin{bmatrix}-5&3&7\\0&-2&-1\end{bmatrix},\ A+B=\begin{bmatrix}4&0&1\\0&4&2\end{bmatrix}$

olduğuna göre B matrisi nedir?

Çözüm

$A-2B=\begin{bmatrix}-5&3&7\\0&-2&-1\end{bmatrix},$

$A+B=\begin{bmatrix}4&0&1\\0&4&2\end{bmatrix}$

\-

$-3B=\begin{bmatrix}-9&3&6\\0&-6&-3\end{bmatrix}$

$B=\begin{bmatrix}3&-1&-2\\0&2&1\end{bmatrix}$

1974 yılından itibaren üniversite giriş sınavlarına göz attığımızda çıkmış bütün soruların hepsinin iki matrisin çarpımı ile ilgili olduğunu görmek şaşırtıcı. Şimdiye kadar anlattığımız ve anlatacağımız bilgiler çarpımla birlikte kullanıldığını görüyoruz.

Hatırlatma:

$\vec{u}=(a,b,c)$ satır vektörü

$\vec{u}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ sütun vektörü

her ikisi de aynı vektörü göstermektedir.

$\vec{u}=(a,b,c),\ \vec{v}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \Rightarrow \vec{u}.\vec{v}=ax+by+cz$

İki vektörün skaler çarpımı bir sayıdır.

Matrislerin çarpımı

Her matrisin çarpımından söz edilemez, matrislerin çarpılabilmesi için;
(mxp).(pxn)→(mxn)

$A=[a_{ij}]_{mxp}$, $B=[b_{ij}]_{pxn}$ iki matris olsun. A ile B nin çarpımı $A.B=[a_{ij}]_{mxp}.[b_{ij}]_{pxn}=[c_{ij}]_{mxn}=C$ gibi başka bir matristir.

$c_{ij}\in A.B$ ise bu eleman A nın i. satır vektörü ile B nin j. sütun vektörünün skaler çarpımına eşittir. Elde edilen bu sayı A.B nin sadece bir elemanıdır. m.n tane eleman için bu skaler çarpım tekrarlanır.

$c_{11}=(\overrightarrow{\text{A1.satırı}}).(\overrightarrow{\text{B1.sütunu}})$

$c_{12}=(\overrightarrow{\text{A1.satırı}}).(\overrightarrow{\text{B2.sütunu}})$

$c_{34}=(\overrightarrow{\text{A3.satırı}}).(\overrightarrow{\text{B4.sütunu}})$

$c_{23}=(\overrightarrow{\text{A2.satırı}}).(\overrightarrow{\text{B3.sütunu}})$

(önce satır sonra sütun)

Örnekler

(3x3).(3x2)→(3x2)

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ k & l & m \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} x & t \\ y & u \\ z & v \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \underbrace{ax+by+cz}_{\text{1.satırx1.sütun=11}} & \underbrace{at+bu+cv}_{\text{1.satırx2.sütun=12}} \\ \underbrace{dx+ey+fz}_{\text{2.satırx1.sütun=21}} & \underbrace{dt+eu+fv}_{\text{2.satırx2.sütun=22}} \\ \underbrace{kx+ly+mz}_{\text{3.satırx1.sütun=31}} & \underbrace{kt+lu+mv}_{\text{3.satırx2.satır=32}} \end{bmatrix}$$

(3x2).(2x2)→(3x2)

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} x & z \\ y & t \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ax+by & az+bt \\ cx+dy & cz+dt \\ ex+fy & ez+ft \end{bmatrix}$$

(2x2).(2x2)→(2x2)

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} x & z \\ y & t \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ax+by & az+bt \\ cx+dy & cz+dt \end{bmatrix}$$

(1x1).(1x1)→(1x1)

$$[a].[x]=[a.x]$$

(1x3).(3x1)→(1x1)

$$\begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ax+by+cz \end{bmatrix}$$

(3x1).(1x2)→(3x2)

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ax & ay \\ bx & by \\ cx & cy \end{bmatrix}$$

(3x1).(1x1)→(3x1)

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} x \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ax \\ bx \\ cx \end{bmatrix}$$

Uyarı

2x+3y-z=7
-3x+y+z=-9
x-5y=10

denklem sistemini matris çarpımı olarak ifade etmek mümkündür.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{katsayılar matrisi}}.\underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{\text{bilinmeyenler matrisi}}=\underbrace{\begin{bmatrix} 7 \\ -9 \\ 10 \end{bmatrix}}_{\text{sabitler matrisi}}$$

Bu durumu tek matrisle ifade etmek mümkün:

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 2 & 3 & -1 & 7 \\ -3 & 1 & 1 & -9 \\ 1 & -5 & 0 & 10 \end{array}\right]$$

Uyarı

$f:R^2 \rightarrow R^2$
f(x,y)=(x+2y,3x-4y)
fonksiyonunu matrislerle ifade edecek olursak;

$$f(x,y)=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Çarpmanın özellikleri
A, B, C çarpılabilir matrisler, k skaler, $n\in N^+$ olmak üzere
a) A.(B.C)=(A.B).C
b) A.(B+C)=A.B+A.C
c) (A+B).C=A.C+B.C
d) k.(A.B)=(k.A).B=A.(k.B)
e) A.I=I.A=A, I birim matris
f) A.O=O.A=O, O sıfır matris
g) A herhangi bir kare matris, olmak üzere
$A^2=A.A$
$A^3=A.A^2$
$A^n=A.A^{n-1}$
h) $I^n=I$, $O^n=O$ (Birim matris zaten kareseldir, O da karesel olmalı ya da çarpma şartına uymalı)

Uyarı

a) A.B $\neq$ =B.A çok özel durumlarda eşit olabilir.
b) A.B çarpılabilir olabilir ama B.A çarpılamayabilir.
c) A.B=O ise A=O veya B=O olması gerekmez.
d) A.B=A.C ise B=C olmak zorunda değildir.

Örnek

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -3 & -6 & 9 \\ -2 & -4 & 6 \end{bmatrix} = ?$$

Çözüm

$$\begin{bmatrix} 1-3+2 & 2-6+4 & -3+9-6 \\ -1+3-2 & -2+6-4 & 3-9+6 \\ 2+0-2 & 4+0-4 & -6+0+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Örnek

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = ?$$

Çözüm

$$\begin{bmatrix} 1+0+0 & 0+2+0 & 0+0+3 \\ 4+0+0 & 0+5+0 & 0+0+6 \\ 7+0+0 & 0+8+0 & 0+0+9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Örnek

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = ?$

b) $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = ?$

a) $\begin{bmatrix} 3+8 & 6+4 \\ 6+4 & 8+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 10 \\ 10 & 11 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 3+8 & 6+4 \\ 6+4 & 8+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 10 \\ 10 & 11 \end{bmatrix}$

Not

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} c & d \\ d & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & d \\ d & c \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$$

Örnek

$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$ veriliyor,

a) $(A+B)^2$ =?
b) A^2+B^2 =?

Çözüm

a) $(A+B)^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 6 & -2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 6 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = 4.I_2$

b) $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -I$

$B^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = 5.I$

$A^2+B^2 = (-1+5)I = 4.I = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

Örnek

$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ olduğuna göre A^{21} =?

Çözüm

Bu tip sorularda I bulunana kadar A^2, A^3, A^4,… hesaplanmalıdır.

$A^2 = A^2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -I$

$A^{21} = (A^2)^{10}.A = (-I)^{10}.A = I.A = A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

Örnek

$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ olduğuna göre A^{16} =?

Çözüm

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$A^{16} = (A^3)^5.A = A$

Not

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow A^2=\begin{bmatrix} a^2+bc & b(a+c) \\ c(a+d) & d^2+bc \end{bmatrix}$$

Not

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A^2=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Not

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^2=\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}=2.\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}=2A$$

$A^2=2A$
$A^3=A^2.A=2A.A=2.A^2=2.2A=2^2.A$
$A^4=A^3.A=2^2A.A=2^2.A^2=2^2.2A=2^3.A$
$A^5=A^4.A=2^3A.A=2^3.A^2=2^3.2A=2^4.A$

…
$A^n=2^{n-1}.A$
$A^2=2A$

Not

$$A=a.\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{a} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^n=a^n.\begin{bmatrix} 1 & \frac{n}{a} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Örnek

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{13}=?$$

Çözüm

$$A^2=\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}=2.\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}=2A$$

$A^2=2A$
$A^{13}=2^{12}.A$

Üslü soru tiplerinde karşılaşabileceğimiz bir tip daha var. Bazı matrislerde sırayla kuvveti hesaplandığında hiçbir zaman birim matris elde edilmez fakat matrisin kendisi elde edilir. Yani bazı matrisler periyodik olabiliyor, modüler aritmetikte olduğu gibi.

Örnek

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{100}=?$$

Çözüm

$$A^2=\begin{bmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$A^2=\begin{bmatrix} -5 & -6 & -6 \\ 9 & 10 & 9 \\ -4 & -4 & -3 \end{bmatrix}$$

$$A^3=A^2.A=\begin{bmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix}=A$$

$A^1=A$
$A^2=A^2$
$A^3=A$
$A^4=A^3.A=A^2$
$A^5=A^4.A=A^2.A=A^3=A$
….
periyod 2 olduğundan 100≡0≡2 (mod 2)
(teklerde A, çiftlerde A^2 ye eşit diyebilirdiniz.)

$$A^{100}=A^2=\begin{bmatrix} -5 & -6 & -6 \\ 9 & 10 & 9 \\ -4 & -4 & -3 \end{bmatrix}$$

Bu ilginç örnekleri yazmadan geçemeyeceğim.

Örnek

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{2006}=?$$

Çözüm

$$A^2=O=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{2006}=O$$

A.B=A olduğunda B=I olması gerekir mi?
Şimdiki örneğimiz bununla ilgili.

Örnek

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow A.B=?$$

Çözüm

$$A.B=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$A.B=\begin{bmatrix}2 & -3 & -5\\ -1 & 4 & 5\\ 1 & -3 & -4\end{bmatrix}=A$$

Tanım (matrisin çarpmaya göre tersi)
A karesel bir matris olmak üzere,
A.B=B.A=I olacak şekilde bir B matrisi varsa, B ye A nın çarpmaya göre tersi denir ve A^{-1} ile gösterilir. Kısaca ters (invers) matris denildiği de olur.

Özellikleri

a) Bir matrisin tersi varsa tektir.
b) $A.A^{-1}=A^{-1}.A=I$
c) $(A^{-1})^{-1}=A$
d) $(A.B)^{-1}=B^{-1}.A^{-1}$
e) $(A.B.C)^{-1}=C^{-1}.B^{-1}.A^{-1}$
f) $A^{-n}=(A^{-1})^{n}$
g) Karesel olmayan matrisin tersinden söz edilemez.

Örnek

$A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ matrisinin (varsa) çarpmaya göre tersini bulunuz.

Çözüm
$A^{-1}=\begin{bmatrix}x & y\\ z & t\end{bmatrix}$ olduğunu düşünelim. x,y,z,t değerleri a,b,c,d türünden bulmaya çalışalım.

$A.A^{-1}=A^{-1}.A=I$
$$\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}x & y\\ z & t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

ax+bz=1 ay+bt=0
cx+dz=0 cy+dt=1

denklem sistemlerini çözelim,
d / ax+bz=1
-b / cx+dz=0

$x=\dfrac{d}{ad-bc}$ benzer şekilde diğerleri

$z=\dfrac{-c}{ad-bc}$

$y=\dfrac{-b}{ad-bc}$

$t=\dfrac{a}{ad-bc}$

$$\begin{bmatrix}x & y\\ z & t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{d}{ad-bc} & \dfrac{-b}{ad-bc}\\ \dfrac{-c}{ad-bc} & \dfrac{a}{ad-bc}\end{bmatrix}=\frac{1}{ad-bc}.\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}$$

Şimdi de bulduğumuz matrisi $A^{-1}.A=I$ kontrolünü yapmak gerekir, bunu da siz yapın.

Sonuç

$$A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}.\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}$$

ad-bc=0 ise A nın tersi yoktur
ad-bc $\neq$ 0 ise A nın tersi vardır

ad-bc değerine A matrisinin determinantı diyeceğiz ve IAI şeklinde göstereceğiz. IAI=ad-bc veya detA=ad-bc olarak yazıldığı da olur.

Sonuç

$$\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}=(ad-bc).I$$

Örnek

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{-2}.\begin{bmatrix}4 & -2\\ -3 & 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{1}.\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{-1}.\begin{bmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{0}.\begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}$ yani tersi yok

$\begin{bmatrix}a & a\\ b & b\end{bmatrix},\begin{bmatrix}a & b\\ a & b\end{bmatrix},\begin{bmatrix}a & b\\ ka & kb\end{bmatrix}$ tersleri yoktur.

Diğer karesel matrislerin tersini determinant işlendikten sonra göstereceğiz. Yalnız bu işin mantığını anlamak açısından bir basit ödev verelim;

Ödev

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}^{-1}=?$$

Bir matrisin transpozu
Bir matrisin satırları sütun, sütunları satır yapılarak elde edilen matrise transpoz (devrik) matris denir.
$A=[a_{ij}]_{mxn}$ ise $AT=[a_{ji}]_{nxm}$

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{bmatrix} \Leftrightarrow A^T=\begin{bmatrix}1&4\\2&5\\3&6\end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix} \Leftrightarrow A^T=\begin{bmatrix}1&4&7\\2&5&8\\3&6&9\end{bmatrix}$$

Özellikleri

a) $(k.A)^T=k.A^T$
b) $(A+B)^T=A^T+B^T$ A, B aynı tip matrisler
c) $(A.B)^T=B^T.A^T$
d) $(A^T)^T=A$
e) $(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$

A karesel matris olmak üzere,
f) $A^T=A$ ise A simetrik matris
g) $A^T=-A$ ise A antisimetrik matris
h) $A^T=A^{-1}$ ise A ortogonal matris

$$\begin{bmatrix}a&1&2\\1&b&3\\2&3&c\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}a&1&2\\1&b&3\\2&3&c\end{bmatrix} \text{ simetrik matris}$$

$$-\begin{bmatrix}0&-1&-2\\1&0&-3\\2&3&0\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}0&-1&-2\\1&0&-3\\2&3&0\end{bmatrix} \text{antisimetrik}$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}^{-1} \text{ ortogonal}$$

Örnek

A ve B matrisleri için $A^T=A^{-1}$, $B^T=B$ ve A.B=B.A olduğuna göre $[(A.B^{-1})^{-1}+(B^{-1}.A)^{-1}]^T$ matrisi A.B matrisinin kaç katıdır?

Çözüm

$[(A.B^{-1})^{-1}+(B^{-1}.A)^{-1}]^T=[(B.A^{-1})+(A^{-1}.B)]^T$
$=[(B.A^T)+(A^T.B)]^T=(B.A^T)^T+(A^T.B)^T$
$=A.B^T+B^T.A=A.B+B.A=2A.B$
2 katı olduğu görülüyor.

Ödevler
1. $A^2=A^T$ olmak üzere, $A.(A^{-1}.A^T)^T$ işlemin en sade eşitini bulunuz. (I)
2. A mxn tipinde bir matris olduğuna göre $A.A^T$ matrisinin tipini bulunuz. (mxm tipinde)
3. $A=B+B^T$ olduğuna göre A^T matrisi A matrisinin kaç katıdır? (1)
4. Tüm özelliklerin doğruluğunu kanıtlayınız.

ÖYS SORULARI

1976
$A=(m,n)$, $B=\begin{pmatrix}1-n&n\\m&1-m\end{pmatrix}$ olduğuna göre A.B aşağıdakilerden hangisidir?

A) B.A B) $\begin{pmatrix}n\\m\end{pmatrix}$ C) B D) $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ E) A

1981/II

$M=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ matrisinde her satırın terimleri toplamı 3 olduğuna göre, M^2 matrisinin 1. satır terimleri toplamı kaçtır?

A) 6 B) 9 C) 12 D) 15 E) 18

1982 /II

$A=\begin{bmatrix}1&-1\\3&1\end{bmatrix}$ olduğuna göre A^{15} matrisi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(-2)^{15}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$ B) $(-2)^{15}\begin{bmatrix}1&-1\\0&1\end{bmatrix}$
C) $4^{15}\begin{bmatrix}1&-1\\3&1\end{bmatrix}$ D) $4^{15}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$
E) $2^{15}\begin{bmatrix}1&-1\\1&0\end{bmatrix}$

1986/II

$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}^{1986}$ matrisinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) 0 B) $\begin{bmatrix} 3^{1986} & 2^{1986} \\ 0 & 3^{1986} \end{bmatrix}$

C) $\begin{bmatrix} 3^{993} & 2^{993} \\ 0 & -3^{993} \end{bmatrix}$ D) $3^{1986}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

E) $3^{993}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

1978

Elemanları (Z/3, +, **.**) cisminin elemanları olan,

$A = \begin{bmatrix} \bar{2} & \bar{1} \\ -\bar{1} & \bar{0} \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} \bar{1} & -\bar{2} \\ \bar{0} & \bar{2} \end{bmatrix}$

Matrisleri için de çarpım kuralı geçerli olduğuna göre AB çarpımı (negatif eleman kullanmadan) aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{0} \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{2} \\ \bar{2} & \bar{0} \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{2} \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{2} & \bar{2} \end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{2} \end{bmatrix}$

1984/II

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ biçiminde bir matrisinin tersi

$A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}.\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ dır.

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ olduğuna göre,

A.X=B eşitliğini sağlayan X matrisinin tüm elemanlarının toplamı kaçtır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

1985/II

$\begin{bmatrix} a & \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{1}{12} & b \end{bmatrix}$ matrisinin tersi kendisine eşit olduğuna göre a aşağıdakilerden hangisidir?

A) 0 B) 1/12 C) 1/3 D) $\sqrt{17}$ /6 E) $\sqrt{35}$ /6

1987/II

$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$, $A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ olduğuna göre c kaçtır?

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

1983/II

$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} x & \dfrac{1}{6} \\ \dfrac{1}{4} & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ olduğuna göre xy çarpımı kaçtır?

A) -1/24 B) -1/18 C) -1/16 D) -1/12 E) -1/6

1979

$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $(a,b,c,d \in Z)$ matrisinin tersi

$M^{-1} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ gibi bir matristir.

$x,y,z,t \in Z$ olması için a,b,c,d aşağıdaki bağıntılardan hangisini sağlamalı?

A) ab-dc=1 B) ad+bc=1 C) ad-bc=1
D) ab+dc=1 E) ac-bd=1

1980

$A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 9 & 2\end{pmatrix}$, $I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ olduğuna göre

det(A- λ I)=0

eşitliğini sağlayan λ değerleri λ_1, λ_2 dir.

Bu λ değerlerinden oluşan A- λ I matrislerinin çarpımı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ B) $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ C) $\begin{pmatrix}3 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}$

D) $\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}$ E) $\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 2\end{pmatrix}$

1988/II

A_{mxm} matrisi ve $B=A^T+A$ verildiğine göre B^T aşağıdakilerden hangisine eşittir?

[A^T, A matrisinin transpozesidir (devriğidir)]

A) B^{-1} B) B C) A^{-1} D) A^T E) A

1990/II

K, 2x2 türünden bir matris olmak üzere,

$K\begin{bmatrix}3\\ 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$ ve $K\begin{bmatrix}-1\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix}$

olduğuna göre

$K\begin{bmatrix}2\\ -1\end{bmatrix}$ aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\begin{bmatrix}-9\\ 7\end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix}-7\\ -4\end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix}-3\\ 2\end{bmatrix}$ D) $\begin{bmatrix}0\\ 7\end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix}2\\ 0\end{bmatrix}$

1991/II

$\begin{bmatrix}1 & 2 & a & 5\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}a\\ 2\\ 3\\ 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\end{bmatrix}$

olduğuna göre, a kaçtır?

A) -6 B) -4 C) 3 D) 4 E) 5

1992/II

$\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\\ -1 & 2\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}1 & 2 & 4\\ 2 & 1 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & . & .\\ . & b & .\\ . & . & c\end{bmatrix}$

olduğuna göre a+b+c toplamı kaçtır?

A) 11 B) 10 C) 2 D) -1 E) -2

1993/II

$\begin{bmatrix}1 & 2\\ -3 & 4\end{bmatrix}^2-2.\begin{bmatrix}1 & 2\\ -3 & 4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

toplamı aşağıdaki matrislerden hangisine eşittir?

A) $\begin{bmatrix}6 & -6\\ -9 & 3\end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix}6 & -6\\ 9 & -3\end{bmatrix}$

C) $\begin{bmatrix}-6 & 6\\ -9 & 3\end{bmatrix}$ D) $\begin{bmatrix}-6 & 6\\ 9 & -3\end{bmatrix}$

E) $\begin{bmatrix}6 & 6\\ 9 & 3\end{bmatrix}$

1994/II

I, 2x2 türünde birim matris ve A= $\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{bmatrix}$

olduğuna göre, A^2-4A+4I işleminin sonucu aşağıdaki matrislerden hangisidir?

A) $\begin{bmatrix}3 & 6\\ 8 & 8\end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix}3 & 6\\ 6 & 9\end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix}5 & 3\\ 3 & 8\end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix}5 & 2\\ 2 & 8\end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix}6 & 2\\ 3 & 2\end{bmatrix}$

1995/II

$A=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ ve $B=\begin{bmatrix}x & y\\ z & t\end{bmatrix}$ olmak üzere,
A+B=A-B olduğuna göre B matrisi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\begin{bmatrix}-3 & 2\\ 6 & 3\end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix}-5 & 0\\ 1 & 7\end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 7 & 8\end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix}4 & 3\\ 1 & -2\end{bmatrix}$

1996/II

$A=\begin{bmatrix}x & 2\\ y & -2\end{bmatrix}$
matrisi için $A^{-1}.A=A^2$ olduğuna göre, x.y çarpımı kaçtır?

A) -5 B) -4 C) -3 D) -2 E) -1

1998/II

$A=\begin{bmatrix}1 & 4\\ -5 & 2\end{bmatrix}$ ve $B=\begin{bmatrix}2 & 3 & 4\\ 0 & -2 & 1\end{bmatrix}$
olduğuna göre, $(AB)^t$ aşağıdakilerden hangisidir?
(A^t: A matrisinin devriği (transpozesi))

A) $\begin{bmatrix} & 2 & 1\\ 0 & -19\\ 8 & -18\end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix}2 & -10\\ -5 & -19\\ 8 & -18\end{bmatrix}$

C) $\begin{bmatrix}3 & -10\\ -5 & -19\\ 7 & -18\end{bmatrix}$ D) $\begin{bmatrix}2 & -5 & 0\\ -10 & -17 & 3\end{bmatrix}$

E) $\begin{bmatrix}3 & 8 & -5\\ 10 & 19 & 18\end{bmatrix}$

1996/II determinant

$\begin{bmatrix}1 & 3 & 5\\ 3 & 0 & 7\\ 1 & 3 & a-9\end{bmatrix}$
matrisinin, ters matrisinin olmaması için a kaç olmalıdır?

A) 15 B) 14 C) 11 D) 6 E) 5

www.geometri.ogretmeni.com
eky - 2005

Determinant

Determinant, elemanları reel sayılar olan karesel matrisleri reel sayılara dönüştüren özel bir fonksiyondur. A matrisinin determinantı det A veya IAI şeklinde gösterilir. A matrisi nxn tipinde ise IAI determinantı n. mertebedendir denir.

nxn tipindeki bütün karesel matrisler için determinant fonksiyonunun genel olarak bir tek tanımı vardır, ancak bu tanım üst sınıflarda verilecektir. Müfredat gereği 1x1, 2x2, 3x3 tipindeki matrislerin determinantı verilecektir. Bu nedenle 1x1, 2x2, 3x3 determinantlarıyla ilgili özel tanım yapıldığını görüyoruz. Üniversite giriş sınavlarında çıkmış sorulara baktığımızda da en çok 3. mertebe determinantla muhatap edildiğimizi görüyoruz.

Tanım (1. mertebeden determinant)

A 1x1 tipinde karesel matrislerin kümesi M_1 olsun. $a \in R$ ve $[a] \in M_1$ olmak üzere,

det:$M_1 \rightarrow R$
det [a] =a

olarak tanımlanır.

det [3]=3, det [-5]=-5 gibi

det(1+2i)=1+2i olan karmaşık sayılar üzerinde determinantlarla karşılaşmak bizi şaşırtmamalı.

Tanım (2. mertebeden determinant)

2x2 tipindeki karesel matrislerin kümesi M_2 olsun. A=$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2$ için

det:$M_2 \rightarrow R$

det A = det $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$=a.d – b.c

olarak tanımlanır.

Örnek

$$\det\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = 4 - 6 = -2$$

$$A = \begin{bmatrix} a & 2 \\ 2 & a \end{bmatrix} \text{ ve IAI=0 } \Rightarrow a = \mp 2$$

Minör – Kofaktör

$$A = \left[a_{ij}\right]_{3x3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$ matrisi verilsin,

Bir matristeki a_{ij} elemanının bulunduğu satır ve sütun silinerek kalan matrisin determinantına **minör** denir. M_{ij} ile gösterilir.

$(-1)^{i+j}.M_{ij}=A_{ij}$ sayısına da a_{ij} nin kofaktörü (eş çarpanı) denir.

Minör ve kofaktör tanımı bütün nxn tipindeki matrisler için geçerlidir.

Örnek

$$A = \left[a_{ij}\right]_{3x3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

1. satır elemanlarının kofaktörlerini bulalım;

a_{ij} nin kofaktörü: $A_{ij}=(-1)^{i+j}.M_{ij}$

a_{11} in kofaktörü:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}.\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22}.a_{33} - a_{23}.a_{32}$$

a_{12} nin kofaktörü:

$$A_{12}=(-1)^{1+2}.\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = -a_{21}.a_{33} + a_{23}.a_{31}$$

a_{13} ün kofaktörü:

$$A_{13}=(-1)^{1+3}.\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{21}.a_{32} - a_{22}.a_{31}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

2. satır elemanlarının kofaktörlerini bulalım;

a_{21} in kofaktörü:

$$A_{21}=(-1)^{2+1}.\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -a_{12}.a_{33} + a_{13}.a_{32}$$

a_{22} nin kofaktörü:

$A_{22}=(-1)^{2+2}.\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}.a_{33} - a_{13}.a_{31}$

a_{23} ün kofaktörü:

$A_{23}=(-1)^{2+3}.\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = -a_{11}.a_{32} + a_{12}.a_{31}$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

3. satır elemanlarının kofaktörlerini bulalım;

a_{31} in kofaktörü:

$A_{31}=(-1)^{3+1}.\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = a_{12}.a_{23} - a_{13}.a_{22}$

a_{32} nin kofaktörü:

$A_{32}=(-1)^{3+2}.\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} = -a_{11}.a_{23} + a_{13}.a_{21}$

a_{33} ün kofaktörü:

$A_{33}=(-1)^{3+3}.\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}$

Tüm elamanlarının kofaktörlerini yazmış olduk.

Sonuç

$k = a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}$
$k = a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+a_{23}A_{23}$
$k = a_{31}A_{31}+a_{32}A_{32}+a_{33}A_{33}$

$k = a_{11}A_{11}+ a_{21}A_{21}+ a_{31}A_{31}$
$k = a_{12}A_{12}+ a_{22}A_{22}+ a_{32}A_{32}$
$k = a_{13}A_{13}+ a_{23}A_{23}+ a_{33}A_{33}$

nxn tipinde bir matrisin herhangi bir satırındaki (sütundaki) elemanların kofaktörleriyle çarpımlarının toplamı k gibi aynı sayıya eşittir. Bu sayı o ***matrisin determinantı*** dır.

Örnek

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ matrisi verilsin, 1. satır elemanlarının kofaktörlerini ve matrisin determinantını bulunuz.

1 in kofaktörü: $\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix}$ = 45- 48 = - 3

2 nin kofaktörü: $-\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix}$ = -(36- 42) = 6

3 in kofaktörü: $\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$ = 32- 35 = - 3

det A = 1.(-3)+2.6+3.(-3)=-3+12-9=0

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1.\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2.\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3.\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 0$$

Örnek

A= $\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}$ matrisinin 2. sütun elemanlarının kofaktörlerini ve determinantını bulunuz.

6 nın kofaktörü: $-|8|$ =-8

9 un kofaktörü: $+|5|$ =5

$\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix}$ =6.(-8)+9.5=-48+45=-3

Yine bir şey uyduralım; demek ki boş matris olsaydı bunun determinantının 1 olması gerekecekti.

Örnek

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 5 & 4 & 0 \end{vmatrix} = ?$$

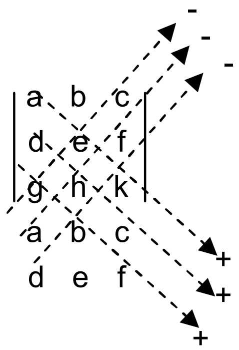
$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 2.\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - 0.\begin{vmatrix} . & . \\ . & . \end{vmatrix} + 0.\begin{vmatrix} . & . \\ . & . \end{vmatrix}$$

=2.(12+1)=26

Demek ki sıfırın bol olduğu satır (veya sütun) varsa o kullanılmalıymış. İleride sıfır yoksa bile sıfır getirme yöntemlerini öğreneceğiz.

Sarrus kuralı

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix}$$



IAI=aek+dhc+gbf-ceg-fha-kbd
Köşegen yönleri +, diğerleri – alınır.

Örnek

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = ?$$

Çözüm

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 1 & 0 \end{matrix}$$

det A =-2-24=-26

Örnek

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = ?$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$
$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{matrix}$$

det A=45+96+84-105-48-72=225-225=0

Determinant özellikleri

1. det A^T = det A

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & k \end{vmatrix}$$

İlkini 1. satıra göre, diğerini 1. sütuna göre açtığımızı düşünsek sonucun değişmediğini görürüz..

Sonuç
Satır için geçerli her kural, sütun için de geçerlidir.

2. Herhangi bir satırı sıfır olan determinant sıfırdır.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & d & 0 \\ b & e & 0 \\ c & f & 0 \end{vmatrix} = 0$$

3. Bir köşegenin altındaki veya üstündeki elemanları sıfır olan determinantın değeri köşegen üzerindeki elemanlar çarpımına eşittir.

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ d & e & 0 \\ g & h & k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & e & f \\ 0 & 0 & k \end{vmatrix} = a.e.k$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & 0 \\ g & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix} = -g.e.c$$

$$\det (I) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

4. Herhangi bir satır diğer satırlardan herhangi bir satırla yer değiştirirse determinantın işareti değişir.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} g & h & k \\ d & e & f \\ a & b & c \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d & e & f \\ g & h & k \\ a & b & c \end{vmatrix}$$

Bu özelliği etkin kullanabilmek için, 2 tane satır yer değiştiriyorsa işaret değişir, 3 tane satır yer değiştiriyorsa işaret değişikliği olmaz gibi aklımızda tutabiliriz. Şimdi ilk örneğe bakalım 1. satır ve 3. satır (2 tane satır) yer değiştirmiş demek ki işaret değişecek. İkinci örneğe bakarsak 1. satır yerinde değil, 2. satır yerinde değil, 3. satır yerinde değil demek ki 3 tanesi yer değiştirmiş o halde işaret değiştirmez. Çiftlerde -, teklerde + gibi genellemek de mümkün.

5. Herhangi iki satırı aynı olan determinant sıfırdır.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ g & h & k \end{vmatrix} = 0$$

Aslında bu 3. özelliğin bir sonucu sayılır. Diyelim ki değeri x ve iki satırı aynı olan bir determinant var. 3. özelliğe göre aynı olan iki satır yer değiştirdiğinde değeri –x olacak, fakat satırlar aynı olduğu için görünürde bir değişiklik olmadığından determinant x e de eşit olacak. x=-x olması ancak x=0 için geçerlidir.

6. Determinantın bir sayı ile çarpımı, herhangi bir satırın o sayı ile çarpımına eşittir.

$$x.\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x.a & x.b & x.c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a & b & c \\ x.d & x.e & x.f \\ g & h & k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ x.g & x.h & x.k \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} xa & xb & xc \\ xd & xe & xf \\ xg & xh & xk \end{vmatrix} = x^3.\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix}$$

Sonuç

nxn tipinde A matrisi için det (-A) =$(-1)^n$.det A

Sonuç

Herhangi iki satırı orantılı olan determinantın değeri sıfırdır.

$$\begin{vmatrix} ya & yb & yc \\ xa & xb & xc \\ g & h & k \end{vmatrix} = x.y.\begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ g & h & k \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 3.\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

7. Herhangi bir satırı, diğer iki satırın toplamı (veya farkı) olan determinantın değeri sıfırdır.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ a \mp d & b \mp e & c \mp f \end{vmatrix} = 0$$

Sarrus ile açılım yaparak doğruluğu görülebilir.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 9 \\ 7 & 8 & 15 \end{vmatrix} = 0$$

8. Bir determinantın herhangi bir satırının x katı başka bir satıra eklenirse determinantın değeri değişmez. (en çok işe yarayan özellik)

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g+xa & h+xb & k+xc \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a & b & c \\ d+ya & e+yb & f+yc \\ g+xa & h+xb & k+xc \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4-1 & 5-2 & 6-3 \\ 7-4 & 8-5 & 9-6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

Uyarı

Eğer bir satırın x katı, aynı satıra eklenirse sonuç değişir. İlk determinantın (x+1) katı olur.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix} = \det A$$

$$\begin{vmatrix} a+ax & b+bx & c+cx \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a(1+x) & b(1+x) & c(1+x) \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix}$$

$$= (1+x).\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix} = (1+x).\det A$$

9. A ve B nxn tipinde iki matrisin karşılıklı n-1 tane satırı aynı ise

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 & c_1+c_2 \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix}$$

Örnek

$$\begin{vmatrix} 7 & 4 & 2 \\ 2 & -3 & 6 \\ 0 & 12 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -7 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & 6 \\ 0 & 12 & -2 \end{vmatrix} = ?$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 6 & -1 \\ 2 & -3 & 6 \\ 0 & 12 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 6 & -1 \\ 2 & -3 & 6 \\ 0.2 & 6.2 & -1.2 \end{vmatrix} = 0$$

10. A ve B nxn tipinde iki matris ise,

a) det (A.B) = det A. det B
b) det (A^k) = (det A)^k
c) det (A+B) $\neq$ det A+det B

Örnek

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \text{ ve } B = \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

olduğuna göre det (A.B)^2 =?

$$\det A = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -4 \end{vmatrix} = -2$$

$$\det B = \begin{vmatrix} -4 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$\det(A.B)^2 = (\det A.\det B)^2 = (-2.2)^2 = 16$$

Örnek

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{bmatrix}$$ olduğuna göre

$$\frac{|A|}{(a-c).(b-c).(a-b)} = ?$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = abc.\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

1. satırda iki elemanı sıfır yapalım, 1. sütunu 2 ve 3. sütundan çıkaralım.

$$|A| = abc.\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix}$$

$$= abc.\begin{vmatrix} b-a & c-a \\ b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix}$$

$$= abc.(b-a).(c-a).\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b+a & c+a \end{vmatrix}$$

= abc.(b-a).(c-a).(c-b)

$$\Rightarrow \frac{|A|}{(a-c)(b-c)(a-b)} = -abc$$

Örnek

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} = 0$$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+2 & 1 & 1 \\ x+2 & x & 1 \\ x+2 & 1 & x \end{vmatrix} = (x+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix}$$

$$= (x+2)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & x-1 & 0 \\ 1 & 0 & x-1 \end{vmatrix} = (x+2)(x-1)^2 = 0$$

ÇK={-2,1}

Örnek

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix} = ?$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c+a & a+c+b & a+b+c \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Örnek

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = ?$$

2 ve 3. sütunu 1. sütuna eklersek,

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

Örnek

$$\begin{vmatrix} a+b & x+y & u+v \\ b+c & y+z & v+w \\ c+a & z+x & w+u \end{vmatrix} = -12 \text{ olduğuna göre}$$

$$\begin{vmatrix} a & x & u \\ b & y & v \\ c & z & w \end{vmatrix} = ?$$

Verilen determinantta 2 ve 3. satırı 1. satıra ekleyelim;

$$\begin{vmatrix} a+b & x+y & u+v \\ b+c & y+z & v+w \\ c+a & z+x & w+u \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2(a+b+c) & 2(x+y+z) & 2(u+v+w) \\ b+c & y+z & v+w \\ c+a & z+x & w+u \end{vmatrix}$$

$$= 2\begin{vmatrix} a+b+c & x+y+z & u+v+w \\ b+c & y+z & v+w \\ c+a & z+x & w+u \end{vmatrix}$$

Şimdi adım adım satırları bir birinden çıkararak sadeleştirelim;

$$= 2\begin{vmatrix} a & x & u \\ b+c & y+z & v+w \\ c+a & z+x & w+u \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & x & u \\ b+c & y+z & v+w \\ c & z & w \end{vmatrix}$$

$$= 2\begin{vmatrix} a & x & u \\ b & y & v \\ c & z & w \end{vmatrix}$$

O halde cevap -6 dır.

Örnek

$$\begin{vmatrix} abc & abc & abc \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & \frac{1}{c} \\ bc & ac & ab \end{vmatrix} = ?$$

$$\begin{vmatrix} a^2bc & ab^2c & abc^2 \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & \frac{1}{c} \\ bc & ac & ab \end{vmatrix} = abc\begin{vmatrix} a & b & c \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & \frac{1}{c} \\ bc & ac & ab \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a & b & c \\ \frac{abc}{a} & \frac{abc}{b} & \frac{abc}{c} \\ bc & ac & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ bc & ac & ab \\ bc & ac & ab \end{vmatrix} = 0$$

Not

Herhangi bir satır bir sayı ile bölünürken, başka bir satır aynı sayı ile çarpılırsa determinantın değeri değişmez.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ . & . & . \\ x & y & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{a}{u} & \frac{b}{u} & \frac{c}{u} \\ . & . & . \\ ux & uy & uz \end{vmatrix}$$

Örnek

$$A=\begin{bmatrix} 2006 & 2007 \\ 2008 & 2009 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = ?$$

2006=a olsun,

$$|A| = \begin{vmatrix} a & a+1 \\ a+2 & a+3 \end{vmatrix} = a^2+3a-(a^2+3a+2)$$

$$|A| = -2$$

Örnek

$$\begin{vmatrix} 2000 & 2001 & 2002 \\ 2003 & 2004 & 2005 \\ 2006 & 2007 & 2008 \end{vmatrix} = ?$$

$$\begin{vmatrix} 2000 & 2001 & 2002 \\ 2003 & 2004 & 2005 \\ 2006 & 2007 & 2008 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2000 & 2001 & 2002 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

Bir matrisin eki ve tersi

Herhangi bir matrisin, elemanlarının yerine kofaktörleri yazılarak elde edilen matrisin transpozuna ilk matrisin eki denir. A matrisinin eki A~ veya $\tilde{A}$ şeklinde gösterilir.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \text{ ise } \tilde{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}^T$$

Sonuç

$A.\tilde{A} = \det A.I$ ve $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}.\tilde{A}$ dır.

Hangi durumda bir matrisin tersi yoktur?

Örnek

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ matrisinin

a) ek matrisini bulunuz.
b) tersini bulunuz.

a) $\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 3 & -5 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 4 & -1 & -5 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

b) $A^{-1} = \dfrac{1}{4}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & -5 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{5}{4} \\ 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

Uyarı

Tersi olan matrislere regüler, olmayanlara singüler matris denir.

Örnek

$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = ?$

$A = a.I \Rightarrow A.A^{-1} = a.I.A^{-1} \Rightarrow I = a.A^{-1}$

$\Rightarrow A^{-1} = \dfrac{1}{a}.I = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a} \end{bmatrix}$

Örnek

$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = ?$

det A = a

$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -b & a & 0 \\ -c & 0 & a \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & -b & -c \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$

$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{b}{a} & -\frac{c}{a} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Not

$\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix} = 2abc$

$\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{vmatrix} = 0$

Lineer denklem sistemleri

Doğru denklemi

Analitik düzlemde $A(x_1,y_1)$ ve $B(x_2,y_2)$ noktalarından geçen doğrunun denklemi;

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Yorum

Determinant denklemi x ve y değişkenlerine göre 1. dereceden iki bilinmeyenli denklemdir. Bu tür denklemlerin grafiklerinin doğru olduğunu biliyoruz. A ve B noktaları bu denklemi sağladığından dolayı elde edilen doğru denklemi AB doğru denklemidir.

Örnek

A(2,-3) ve B(1,2) noktalarından geçen doğrunun denklemi aşağıdakilerden hangisi <u>değildir</u>?

A) $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$ B) $\begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ x & 2 & 1 \\ y & -3 & 2 \end{vmatrix} = 0$

C) $\begin{vmatrix} 2x & 3 & 2y \\ 4 & 3 & -6 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0$ D) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & 1 \\ y & -x & 1 \end{vmatrix} = 0$

E) $\begin{vmatrix} x+y & x-y & 1 \\ -1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

Şıklarda verilen her determinant denklemi bir doğru belirtir. A(2,-3) ve B(1,2) bu denklemi sağlamalıdır. Tek tek şıklarda x=2, y=-3 ve x=1, y=2 değerlerinin denklemi sağlayıp sağlamadığını kontrol etmek gerekir. E şıkkındaki denklem B noktasını sağlamadığı için B noktasından geçmeyen bir doğru belirtir.

Lineer (doğrusal) denklem sistemleri

ax+b=0
biçimindeki denklemlere bir bilinmeyenli lineer denklem denir.
ax+by=c
dx+ey=f
biçimindeki denklemlere iki bilinmeyenli lineer denklem sistemi denir.

Genel olarak,
$a_{11}.x_1+a_{12}.x_2+\ldots+a_{1n}.x_n=b_1$
$a_{21}.x_1+a_{22}.x_2+\ldots+a_{2n}.x_n=b_2$
$a_{31}.x_1+a_{32}.x_2+\ldots+a_{3n}.x_n=b_3$
……
$a_{m1}.x_1+a_{m2}.x_2+\ldots+a_{mn}.x_n=b_m$
biçimindeki denklemlere n bilinmeyenli, m tane denklemden oluşan lineer denklem sistemi denir.

Bu sistemi matris gösterimi kullanırsak;

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{\text{A katsayılar matrisi}} . \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix}}_{\text{X bilinmeyenler matrisi}} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{bmatrix}}_{\text{B sabitler matrisi}}$$

A.X=B biçiminde ifade edilebilir.

B nin tüm elemanı 0 ise bu sisteme ***homojen sistem*** denir.
B nin sıfırdan farklı en az bir elemanı varsa sisteme ***homojen olmayan sistem*** denir.

m=n yani A karesel matris ise;
AX=B lineer denklem sisteminin çözümünü bulmak için;
a) $|A| \neq 0$ ise $X=A^{-1}.B$ dir.
b) $|A|=0$ ise sistemin çözümü yoktur.

Müfredat gereği en çok üç bilinmeyenli denklem sistemlerinden sorumluyuz.

Cramer Kuralı

$a_1x+b_1y+c_1z=d_1$
$a_2x+b_2y+c_2z=d_2$
$a_3x+b_3y+c_3z=d_3$

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

$x = \frac{\Delta x}{\Delta}$, $y = \frac{\Delta y}{\Delta}$, $z = \frac{\Delta z}{\Delta}$ dir.

$\Delta \neq 0$ ve bilinmeyen sayısı kadar denklem verilmişse daima bu yöntemi kullanabiliriz.

Örnek

2x-y=3
x+y=0

lineer denklem sistemini
a) matris ile
b) cramer yöntemi ile
çözünüz.

a) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$

AX=B dersek $X=A^{-1}.B$
det A =3

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}.\tilde{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

x=1, y=-1

b) $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3$, $\Delta x = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -3$$

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = 1 \text{ ve } y = \frac{\Delta y}{\Delta} = -1$$